ਐਮ.ਏ. (ਅਰਥ-ਸ਼ਾਸਤਰ) ਭਾਗ-ਪਹਿਲਾ (ਸਮੈਸਟਰ-ਪਹਿਲਾ) ਪੇਪਰ-ਤੀਜਾ

(Basic Quantitative Methods)

ਸੈਕਸ਼ਨ-ਬੀ

ਡਿਸਟੈਂਸ ਐਜੂਕੇਸ਼ਨ ਵਿਭਾਗ
ਪੰਜਾਬੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪਟਿਆਲਾ

ਪਾਠ ਨੰ:

ਮੈਟਰਿਸਜ (Matrices)

1. ਜਾਣ-ਪਛਾਣ
2. ਕਿਸਮਾਂ
3. ਮੈਟਰਿਸ਼ਜ ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ
   - 3.1 ਮੈਟਰਿਸ਼ਜ ਦਾ ਜੋੜ
   - 3.2 ਮੈਟਰਿਸ਼ਜ ਦਾ ਘਟਾਉ
   - 3.3 ਮੈਟਰਿਸ਼ਜ ਦਾ ਆਪਸ ਵਿਚ ਗੁਣਾਂ
4. ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਕਿਤਾਬਾਂ
5. ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ (Matrix Algebra) ਪਿਛਲੀ ਤਕਰੀਬਨ ਇਕ ਸਦੀ ਤੋਂ ਕੁਝ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਮੇਂ ਤੋਂ ਹੀ ਹੋਂਦ ਵਿਚ ਆਇਆ ਹੈ। ਮੁੱਖ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸਦਾ ਸੇਹਰਾ ਬ੍ਰਿਟਿਸ਼ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Arthur Cayley ਨੂੰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ-ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਅਕਸਰ ਹੀ ਵਰਤੋਂ ਵਿਚ ਆਉਣ ਲੱਗਿਆ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ ਸਾਧਾਰਨ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਜੇਕਰ ਗਣਿਤ ਦੀ ਸੰਕੇਤ ਲਿੱਪੀ ਸੀ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ-ਬੀਜ-ਗਣਿਤ, ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਦੀ ਵੀ ਸੰਕੇਤ ਲਿੱਪੀ ਹੈ। ਅਜੋਕੇ ਸਮੇਂ ਵਿਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ-ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਜਿਉਮੈਟਰੀ, ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ, ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ, ਅਰਥ ਵਿਗਿਆਨ, ਮਨੋਂ-ਵਿਗਿਆਨ, ਸਿੱਖਿਆ ਆਦਿ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਵਿਚ ਆਪਣੀ ਥਾਂ ਬਣਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ। ਅਰਥ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿਚ ਹੁਣ ਜ਼ਿਆਦਾ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਗਣਿਤ, ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੋਣ ਲੱਗ ਪਈ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ-ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਲਾਜ਼ਮੀ ਬਣ ਚੁੱਕਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਮਕਾਲੀਨ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਸੌਖਾ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਬਹੁਤ ਵੱਡੇ ਵੱਡੇ ਸਮੀਕਰਨ-ਸਿਸਟਮ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਬੜੇ ਸੰਗਠਤ ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮੁੱਖ ਤੌਰ ਤੇ ਇਕ-ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਕ-ਘਾਤੀ ਰੇਖਾ ਜਾਂ ਸਮੀਕਰਨ ਦੀ ਮਨੌਤ ਅਰਥ ਵਿਗਿਆਨ 'ਚ ਅਕਸਰ ਹੀ ਪਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਅਸਲ ਵਿਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇਕ ਆਇਤਕਾਰ ਤਰਤੀਬ। ਇਸ ਦੀ ਇਕ ਸੌਖੀ, ਸਾਧਾਰਨ ਜਿਹੀ ਉਦਾਹਰਨ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਫਰਜ਼ ਕਰੋ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਦੋ ਇਕ-ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਹਨ :

$$4x + 3y - 5z = 0$$
$$6x - 8y + 3z = 0$$

ਦੋਨਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰਤੀਬ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 6 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ 'A' ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ (Rows) ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਕਾਲਮ (Columns) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (order) 2×3 ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤਾਂ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸੈੱਟ ਨੂੰ ਆਇਤਕਾਰ ਤਰਤੀਬ ਵਿਚ ਲਿਖਣ ਨੂੰ ਹੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ $m \times n$ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਆਇਤਕਾਰ ਤਰਤੀਬ 'ਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਾਂਗੇ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1j}.....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2j}.....a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{ij}.....a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mj}.....a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇਸ ਦੀਆਂ m ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ n ਕਾਲਮ ਹਨ, ਜਦ ਕਿ m ਅਤੇ n ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਿਕ ਪੂਰਨ ਅੰਕ (positive integer) ਹਨ। a_{11}, a_{12} ਆਦਿ ਮੈਟਰਿਕਸ 'A' ਦੇ ਅੰਸ਼ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਵੀ ith ਕਤਾਰ ਅਤੇ jth ਕਾਲਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$A = [aij],\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਕਰਨ-ਅੰਸ਼ (Diagonal Elements) : ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ aij ਅੰਸ਼ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ $i = j$ ਹੋਵੇ, ਅਰਥਾਤ ਅੰਸ਼ $a_{11}, a_{22}, a_{33}....$ ਆਦਿ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ ਹਨ।

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ (Equality of Matrices)

ਦੋ ਮੈਟਰਿਕਸ $A = [aij]$ ਅਤੇ $B = [bij]$ ਆਪਸ 'ਚ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਪੂਰੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹੋਣ :

(i) ਜੇ ਦੋਨੋਂ A ਅਤੇ B ਇਕ ਕਿਸਮ ਦੇ ਹੋਣ ਅਰਥਾਤ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਇਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

(ii) ਦੋਨਾਂ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੇ ਤਦ-ਸਥਾਨੀ ਅੰਸ਼ (corresponding elements) ਇਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਭਾਵ $a_{ij} = b_{ij}$, i ਤੇ j ਦੀ ਹਰ ਕੀਮਤ ਤੇ ਅਜਿਹਾ ਹੋਣਾ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਜੇਕਰ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times2}$$

A ਅਤੇ B ਦੋਵਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 2×2 ਹੈ ਅਤੇ $A = B$ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ $B = A$ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ ਅਤੇ $a_{22} = b_{22}$

ਇਥੇ ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਹੈ ਕਿ ਜੇ $A = B$ ਤਾਂ $B = A$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $A = B$ ਅਤੇ $B = C$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $A = C$ ਵੀ ਠੀਕ ਹੋਵੇਗਾ।

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ (ਥਾਂ ਬਦਲੀ) :

ਜੇਕਰ $A = [aij]$ ਇਕ $p \times q$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ $B = (bij)$ (ਜਿਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ $p \times q$ ਹੋਵੇ) ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ i ਅਤੇ j ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਵਾਸਤੇ $bij = aij$ ਅਰਥਾਤ B ਦਾ (i,j)th ਅੰਸ਼ A ਦੇ (j,i)th ਅੰਸ਼ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ 'ਚ $B = A'$ ਜਿਥੇ $A' = A$ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਹੈ ।

or $A' = B$

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ 'ਚ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਉਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਨੂੰ ਕਾਲਮਾਂ ਨਾਲ ਬਦਲ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ

$$\text{ਜੇਕਰ} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{3\times4} \text{ ਤਾਂ } A' = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{4\times3}$$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ

1. ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਫਿਰ ਉਹੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿਚ $(A^1)^1 = A$
2. $(KA)' = KA'$ ਜਦੋਂ K ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਅੰਕ ਹੈ ਜੋ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ।
3. ਦੋ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ 'ਚ $(A + B)' = A' + B'$

(ਨੋਟ : ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।)

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of Matrices)

1. ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਕਤਾਰ ਮੈਟਰਿਕਸ (Row Matrix)

ਪੰਕਤੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਇਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਕੇਵਲ ਇਕ ਹੀ ਕਤਾਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਗਿਣਤੀ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ :

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots\ldots\ a_{1n})_{1\times n}$$

2. ਕਾਲਮ ਮੈਟਰਿਕਸ (Column Matrix)

ਕਾਲਮ ਮੈਟਰਿਕਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਕਾਲਮ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਗਿਣਤੀ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{ml} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

3. ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ (Square Matrix)

ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਖਾਨਿਆਂ ਤੇ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੇਕਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਵਰਗ–ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$ A ਇਕ 2×2 ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ।

4. ਆਇਤਾਕਾਰ ਮੈਟਰਿਕਸ (Rectangular Matrix)

ਕੋਈ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਜੋ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਉਸ ਨੂੰ ਆਇਤਾਕਾਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਹੈ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

5. ਵਿਕਰਨ ਮੈਟਰਿਕਸ (Diagonal Matrix)

ਇਹ ਇਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿਚ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਨ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਬਾਕੀ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

6. ਆਦਿਸ ਮੈਟਰਿਕਸ (Scalar Matrix)

ਇਕੋ ਵਿਕਰਨ ਮੈਟਰਿਕਸ, ਜਿਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਆਦਿਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$ ਜਿੱਥੇ $a_{11} = a_{22} = a_{33}$

ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰ ਇਕ scalar matrix, diagonal matrix ਹੈ ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

7. ਇਕਾਈ ਮੈਟਰਿਕਸ (Unit or Identity Matrix)

ਇਕਾਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਇਕ ਵਿਕਰਨ ਮੈਟਰਿਕਸ, ਜਿਸਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਕਰਨ-ਅੰਸ਼ ਇਕਾਈ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਜਿਵੇਂ ਕਿ :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

8. ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਮਨਸੂਖ ਮੈਟਰਿਕਸ (Zero or Null Matrix)

ਜਿਸ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਉਸ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਮਨਸੂਖ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ।

9. ਤਿਕੋਣਾ ਮੈਟਰਿਕਸ (Triangular Matrix)

ਇਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A = [aij] ਤਿਕੋਣਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਨ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਵਾਲੇ ਜਾਂ ਉਪਰ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

ਇਹ ਤਿਕੋਣਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$ ਜਾਂ $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, ਜੇਕਰ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਨ ਹੇਠਲੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਰਥਾਤ $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹ **ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਪਰਲਾ ਤਿਕੋਣਾ** ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਨ ਦੇ ਉਪਰਲੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣ ਅਰਥਾਤ $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ **ਹੇਠਲਾ ਤਿਕੋਣਾ ਮੈਟਰਿਕਸ** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

ਉਪਰਲੇ ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਤਿਕੋਨੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ।

10. ਉਪ-ਮੈਟਰਿਕਸ (Sub-Matrix)

ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਕੁਝ ਕਾਲਮਾਂ ਨੂੰ ਹਟਾ ਜਾਂ ਛੱਡਕੇ ਬਾਕੀ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਤੋਂ ਜੋ ਮੈਟਰਿਕਸ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਉਪ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਜੇਕਰ A ਕੋਈ ਮੈਟਰਿਕਸ 4 × 4 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੋਵੇ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4\times4}$$

ਤਾਂ ਇਸ ਵਿਚੋਂ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਚੌਥਾ ਕਾਲਮ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਮੈਟਰਿਕਸ :

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

ਇਹ ਇਕ 3 × 3 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਉਪ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਹੜਾ A ਵਿਚੋਂ ਕੁਝ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਕੁਝ ਕਾਲਮ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

11. ਸਮ-ਮਾਪੀ ਮੈਟਰਿਕਸ (Symmetric Matrix)

ਕੋਈ ਵੀ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਨੂੰ ਸਮ-ਮਾਪੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿਚ aij = aji, ਅਰਥਾਤ A ਦਾ (ij)th ਅੰਸ਼ A ਦੇ ਹੀ (ji)th ਅੰਸ਼ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ $A^1 = A$ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad \text{ਅਤੇ} \quad B = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}_{3\times3}$$

A ਅਤੇ B ਸਮ-ਮਾਪੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹਨ।

12. ਸਰਣਸਮਤਿਯ ਮੈਟਰਿਕਸ (Skew-Symmetric Matrix)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਵਿਚੋਂ i ਅਤੇ j ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ (values) ਲਈ $a_{ij} = a_{ji}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਸਰਣਸਮਤਿਯ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਜਿਹੇ ਮੈਟਰਿਕਸ 'ਚ aij = -aji

aij = -aji (ਜੇਕਰ i = j)

aji = 0 (zero) ਜਾਂ A=-A

ਸਰਣਸਮਤਿਯ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਣ ਦਾ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad \text{ਅਤੇ} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & o & -c \\ b & c & o \end{bmatrix}$$

A ਅਤੇ B ਸਰਣਸਮਤਿਯ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ।

13. **ਲੰਬ ਕੋਣੀ ਮੈਟਰਿਕਸ (Orthogonal Matrix)**

ਕੋਈ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਲੰਬ ਕੋਣੀ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ A'A = 1 = AA'

14. **ਇਡੈਂਪੋਟੈਂਟ ਮੈਟਰਿਕਸ (Idempotent Matrix)**

ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਨੂੰ ਇਡੈਂਪੋਟੈਂਟ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ

$A^2 = A$ i.e. [A] [A] = A

ਹੇਠਾਂ ਇਡੈਂਪੋਟੈਂਟ ਮੈਟਰਿਕਸ (Idempotent Matrix) ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : (ਇਡੈਂਪੋਟੈਂਟ ਮੈਟਰਿਕਸ)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{ਤਾਂ} \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3-5 & -3-9+15 & -5-15+25 \\ -1-3+5 & 3+9-15 & 5+15-25 \\ 1+3-5 & -3-9+15 & -5-15+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = A$$

15. **ਅਨੁਗਾਮੀ ਮੈਟਰਿਕਸ (Conjugate Matrix)**

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਇਸ ਦੇ ਤਦ-ਸਥਾਨੀ ਅਨੁਗਾਮੀ ਮਿਸਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Corresponding Conjugate Elements) ਦੁਆਰਾ ਬਦਲ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਨਵੇਂ ਬਣੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨੂੰ A ਦਾ ਅਨੁਗਾਮੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ Ã ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਜੇ A = [aij] ਹੋਵੇ

ਤਾਂ Ã = [bij], ਜਿਥੇ bij = aij

ਜੇਕਰ ਮੈਟਰਿਕਸ Ã ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ A ਅਨੁਗਾਮੀ ($\overline{A}$), A ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $(\tilde{A}) = A$ ਅਰਥਾਤ A ਅਨੁਗਾਮੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਅਨੁਗਾਮੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਨੁਗਾਮੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ :

$$A = \begin{bmatrix} 1+2i & 2-3i & 3+4i \\ 4-5i & 5+6i & 6-7i \\ 8 & 7-8i & 7 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & 2+3i & 3-4i \\ 4+5i & 5-6i & 6+7i \\ 8 & 7+8i & 7 \end{bmatrix} = A$$

16. ਹਰਮੀਟਨ ਮੈਟਰਿਕਸ (Hermitian Matrix)

ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਆਪਣੇ ਅਨੁਗਾਮੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ Hermitian ਮੈਟਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਜੇਕਰ

$A = \left(\overline{A}\right)'$ ਤਾਂ A Hermitian ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ।

(A) ਨੂੰ A^{θ} ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

Hermitian ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਨ (Diagonal) ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ real ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ :- ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3-4i \\ 2+3i & 0 & 4-5i \\ 3+4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$

ਤਾਂ $A^{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4+5i \\ 3-4i & 4-5i & 2 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ $\left(A^{\theta}\right)^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3-4i \\ 2+3i & 0 & 4-5i \\ 3+4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$

17. ਸਕਿਊ-ਹਰਮੀਟਨ ਮੈਟਰਿਕਸ (Skew-Hermitian Matrix)

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਲਈ $A = -A^{\theta}$, ਤਾਂ Skew-Hermitian Matrix ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ :-

$$A = \begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix}$$

Skew-Hermitian ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ। (ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਆਪ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ)

Skew-Hermitian ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ pure imaginary ਜਾਂ zero number ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

18. ਸੁੰਨਭਾਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ (Nilpotent Matrix)

ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਨੂੰ ਸੁੰਨਭਾਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $A^2 = O$, ਜਿਥੇ p ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਿਕ ਪੂਰਣ ਅੰਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ਸੁੰਨਭਾਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ (Operations of Matrices)

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਵਿਚ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਜੋੜ, ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ ਆਦਿ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਜੋੜ (Addition of Matrices)

ਦੋ (ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਨੂੰ ਤਾਂ ਹੀ ਜੋੜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਮਾਪ ਜਾਂ ਆਕਾਰ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਹੋਵੇ। ਅਜਿਹੀ ਹਾਲਤ ਵਿਚ ਜੇ $A = (aij)$ ਅਤੇ $B = (bij)$ ਤਾਂ $A + B = C$, ਜਿਥੇ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਕ ਸਮਾਨ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ

ਜੋੜ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਉਦਾਹਰਣ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

ਤਾਂ $C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$

ਮੈਟਰਿਸਜ-ਜੋੜ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਈਆਂ

1. ਮੈਟਰਿਸਜ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮ-ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ Commutative ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ :

   $A + B = B + A$

2. ਮੈਟਰਿਸਜ ਦਾ ਜੋੜ ਸੰਯੋਜਕ (Associative) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਮੈਟਰਿਸਜ A, B ਤੇ C ਹੋਣ ਤਾਂ

   $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

ਮੈਟਰਿਸਜ ਦਾ ਘਟਾਓ (Subtraction of Matrices)

ਦੋ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਅੰਤਰ ਤਾਂ ਹੀ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਦੋਨਾਂ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਮਾਪ ਜਾਂ ਆਕਾਰ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਹੋਵੇ ਭਾਵ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਹੋਵੇ। $A - B$ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ A ਦੇ ਹਰ ਅੰਸ਼ ਵਿਚੋਂ B ਦੇ ਤਦਸਥਾਨੀ ਅੰਸ਼ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣਾ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿਚ ਜੇਕਰ $A = [aij]_{m \times n}$

ਅਤੇ $B = [bij]_{m \times n}$ ਤਾਂ $C = A-B = [cij]_{m \times n}$

ਅਰਥਾਤ $[aij]_{m \times n} - [bij]_{m \times n} = [cij]_{m \times n}$

ਉਦਾਹਰਣ ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\4 & 3 & 7\\8 & 7 & 5\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 2 & 5\\4 & 3 & 2\end{bmatrix}$

$$\text{ਤਾਂ } A-B=\begin{bmatrix}2-1 & 5-3 & 6-4\\4-2 & 3-2 & 7-5\\8-4 & 7-3 & 5-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 1 & 2\\4 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

ਮੈਟਰਿਸਜ ਦਾ ਆਪਸ ਵਿਚ ਗੁਣਾਂ (Multiplication of Matrices)

ਦੋ (ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਮੈਟਰਿਕਸ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿਚ ਗੁਣਾਂ ਤਾਂ ਹੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਹ ਆਪਸ ਵਿਚ ਗੁਣਾਂ ਹੋ ਸਕਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹੋਣ (conformable) ਹੋਣ। ਯੋਗ ਹੋਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਖਾਨਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੂਜੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣੀ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿਚ ਗੁਣਾਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਤਕਨੀਕੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿਚ ਜੇਕਰ $A = [aij]_{m\times n}$ ਅਤੇ $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ ਹੋਣ ਜਿਥੇ $i = 1, 2 \ldots m$, $j = 1, 2\ldots, n$ ਅਤੇ $k = 1, 2 \ldots p$ ਤਾਂ ਹੀ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿਚ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ = AB ਆ ਜਾਵੇਗਾ ਜਿਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ $m \times p$ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ C ਦਾ $C_{ik}{}^{th}$ ਅੰਸ਼ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ :-

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{ik} + a_{i2}\, b_{2k} + \ldots + a_{in}\, b_{nk}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\; b_{jk}$$

ਅਰਥਾਤ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ A ਦੀ i th ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ B ਦੇ K th ਕਾਲਮ ਦੇ ਤਦ-ਸਥਾਨੀ (corresponding) ਅੰਸ਼ਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰੀਏ ਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਡੇ ਪਾਸ C_{ik} ਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਜੇਕਰ A ਨੂੰ B ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ A ਨੂੰ ਪੂਰਵ-ਗੁਣਨ ਖੰਡ (prefactor) ਅਤੇ B ਨੂੰ ਮਗਰਲਾ-ਗੁਣਨਖੰਡ (postfactor) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ B ਨੂੰ A ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ B ਨੂੰ ਪੂਰਵ-ਗੁਣਨ-ਖੰਡ ਅਤੇ A ਨੂੰ ਮਗਰਲਾ ਗੁਣਨ-ਖੰਡ ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅੱਗੇ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਆਪਸੀ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2} \quad B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6\\5 & 3 & 3\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇਖਣ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਦੋਵੇਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਆਪਸ 'ਚ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀ। A ਦਾ ਕ੍ਰਮ 2×2 ਅਤੇ B ਦਾ ਕ੍ਰਮ 2×3 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ AB ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਤੇ AB ਦਾ ਕ੍ਰਮ 2×3 ਹੋਵੇਗਾ। ਜਿਵੇਂ :-

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2\times4+3\times5 & 2\times2+3\times3 & 2\times6+3\times3 \\ 4\times4+1\times5 & 4\times2+1\times3 & 4\times6+1\times3 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+15 & 4+9 & 12+9 \\ 16+5 & 8+3 & 24+3 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 23 & 13 & 21 \\ 21 & 11 & 27 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉੱਚੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਵੀ ਆਪਸ 'ਚ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਵਿਧੀ ਉਪਰੋਕਤ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਹੈ, ਭਾਵ ਪੂਰਵ-ਗੁਣਨ ਖੰਡ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਮਗਰਲੇ ਗੁਣਨ-ਖੰਡ ਦੇ ਖਾਨਿਆਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਤਦ-ਸਥਾਨੀ ਅੰਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿਚੋਂ A ਪੂਰਣ-ਗੁਣਨ ਖੰਡ ਅਤੇ B ਮਗਰਲਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ B ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਖਾਨੇ ਦੇ ਤਦਸਥਾਨੀ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ AB ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਖਾਨੇ ਦਾ ਅੰਸ਼ ਤੇ A ਦੀ ਹੀ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਨੂੰ B ਦੇ ਦੂਜੇ ਖਾਨੇ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ AB ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਦੂਜੇ ਖਾਨੇ ਦਾ ਅੰਸ਼ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ AB ਦੇ ਬਾਕੀ ਅੰਸ਼ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਇਥੇ ਇਕ ਹੋਰ ਗੱਲ ਵਰਨਣ ਕਰਨੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਉਹ ਇਹ ਕਿ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਜੇ AB ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ ਤਾਂ BA ਦੀ ਵੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇਗੀ। BA ਦੀ ਹੋਂਦ ਲਈ B ਦੇ ਖਾਨਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ A ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣੀ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਵੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ AB = BA ਅਤੇ BA = AB, ਹੋਵੇ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ 'ਚ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਗੁਣਕ ਕ੍ਰਮ ਪਰਿਵਰਤਨੀ ਹੋਵੇ।

ਦਰਅਸਲ ਮੈਟਰਿਕਸਜ ਗੁਣਨ ਤੇ ਤਾਂ ਕੇਵਲ ਦੋ ਹੀ ਨਿਯਮ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਇਕ ਸੰਯੋਜਕ ਨਿਯਮ (Associative Law) ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਵਿਤਰਣ ਨਿਯਮ (Distributive law)

ਸੰਯੋਜਕ ਨਿਯਮ (Associative Law)

ਜੇਕਰ (AB) C = A (BC) = ABC ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੰਯੋਜਕ ਨਿਯਮ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। A, B, C ਤਿੰਨੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹਨ ਕਿ AB, BC ਅਤੇ ABC ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹਨ, ਅਰਥਾਤ

$A_{m\times n}\ B_{n\times p}\ C_{p\times q} = [ABC]_{m\times q}$

ਵਿਤਰਣ ਨਿਯਮ (Distributive Law)

(i) A (B + C) = AB + AC ਬਸ਼ਰਤੇ ਕਿ B ਅਤੇ C ਇਕੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹੋਣ ਅਤੇ A ਮੈਟਰਿਕਸ B ਅਤੇ C ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਹੋ ਸਕਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹੋਵੇ।

(ii) (B + C) A = BA + CA

ਬਸ਼ਰਤੇ ਕਿ B ਤੇ C ਇਕੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹੋਣ ਅਤੇ B + C ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਮੈਟਰਿਕਸ A, ਮੈਟਰਿਕਸ B ਨਾਲ ਅਤੇ A ਮੈਟਰਿਕਸ C ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਹੋ ਸਕਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹੋਣ।

ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਦੁਆਰਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨੂੰ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨਾ।

ਫਰਜ ਕਰੋ A = (aij) ਇੱਕ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ। λ ਅਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਅਨੁਸਾਰ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$\lambda\ A = (\lambda\ aij)$

ਅਰਥਾਤ λ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ

ਜੇ $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ਤਾਂ $$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\lambda = 2$

ਤਾਂ $2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਕ ਦੇ ਗੁਣ

1. ਜੇ A ਅਤੇ B ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਣ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ
   $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
2. ਜੇ A ਕੋਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਤੇ λ_1, λ_2 ਕੋਈ ਸਕੇਲਰਜ਼ ਹੋਣ, ਤਾਂ
   (i) $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$ (ii) $\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)A$

ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ :

1. ਜੇ $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   ਹੋਵੇ ਤਾਂ (i) $P^2 Q + Q^2 P$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ਤਾਂ} \quad P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਤਾਂ $P^2Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ਅਤੇ $Q^2P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P^2Q + Q^2P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ

ਜੇ $P = [x\ y\ z]$, $Q = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$ ਅਤੇ

$R = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ਤਾਂ

ਸਿੱਧ ਕਰੋ $P(QR) = (PQ)R$

ਹੱਲ : $QR = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + hy + gz \\ hx + by + fz \\ gx + fy + cz \end{bmatrix}$

$P(QR) = [\,x\ y\ z\,] \begin{bmatrix} ax + hy + gz \\ hx + by + fz \\ gx + fy + cz \end{bmatrix}$

$P(QR) = [ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx]$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ (PQ) R ਨੂੰ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$P(QR) = (PQ)R = [ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx]$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਨੁਵਰਣ (Trace of Matrix)

ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਵਿਚੋਂ a_{ij} ਅੰਸ਼ ਜਦੋਂ $i = j$, ਵਿਕਰਨ ਅੰਸ਼ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ

ਰੇਖਾ ਤੇ ਉਹ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਉਸ ਨੂੰ ਵਿਕਰਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੁੱਖ ਵਿਕਰਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਨੁਵਰਣ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਜੇ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$

ਤਾਂ tr (A) or tr A = ਵਿਕਰਨੀ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

$= a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sum_{i=1}^{3} aij$

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਜੇ $A = (aij)_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

ਹੋਵੇ ਤਾਂ $tr\,A = a_{11} + a_{22} + \ldots\ldots.. + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} aij$

ਉਦਾਹਰਣ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ A ਦਾ ਅਨੁਵਰਣ = 1 + 0 + (-1) = 0

ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਕਿਤਾਬਾਂ

1. *An Introduction to the use of Mathematics in Economic Analysis,* by D.S. Haung.
2. *An Introduction to Mathematics for students of Economics,* by J. Parry Lewis (2nd Edition) (Chap. 29-31).
3. *Fundamental Methods of Mathematical Economics,* by Alpha C. Chiang (2nd Ed. Chap. 4).
4. *Mathematics for Students of Economics,* by Om Parkash Bhardwaj and Jagdish Rai Sabharwal (Latest Edition).
5. *Topics in Algebra,* by P.N. Arora (Third Edition).
6. *Mathematics for Economists,* by Taro Yamne. (2nd Ed. Chap. 10, 11).

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਦਿਓ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀਆਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਕਿਸਮਾਂ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸਹਿਤ ਵੇਰਵਾ ਦਿਓ।

2. ਮੈਟਰਿਕਸ-ਜੋੜ ਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਘਟਾਓ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਬਿਆਨ ਕਰੋ।

   ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

   ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ (a) $(A + B) + C = A + (B - C)$

   (b) $(A + B) - C = A + (B - C)$

3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB = BA$

   ਜੇ $A = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} r & k \\ -k & r \end{bmatrix}$

4. ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਤੋਂ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ, ਇਸ ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਓ ਅਤੇ ਇਹ ਦੱਸੋ ਕਿ $(AB)' = B'A' = 1$

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਮੈਟਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਦੇ ਸੰਯੋਜਕ ਅਤੇ ਵਿਤਰਣ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਟੈਸਟ ਕਰੋ।

   $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

   (1) ਅਰਥਾਤ $AB(C) = A(BC)$

   ਅਤੇ (2) $A(B + C) = AB + AC$

   $(B + C)A = BA + CA$

6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ

   $A^3 - 3A^2 + 3A - 1 = 0$

7. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

   ਤਾਂ ਇਕ ਅਜਿਹਾ $[X]_{1\times 4}$ ਲੱਭੋ ਜੋ ਕਿ $A - 2X = 3B$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ।

ਪਾਠ ਨੰ : 2.2 — ਲੇਖਕ : ਡਾ. ਰਣਜੀਤ ਸਿੰਘ ਘੁੰਮਣ

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਅਤੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਗੁਣ
(Determinants and its Properties)

1. ਜਾਣ-ਪਛਾਣ
2. ਸਹਿ-ਖੰਡ
3. ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਗੁਣ
4. ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਪਾਠ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ 'ਚ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ ਕਿ ਮੈਟਰਿਕਸ-ਗਣਿਤ ਅਰਥ-ਵਿਗਿਆਨ 'ਚ ਕਿੰਨੀ ਮਹੱਤਤਾ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਮੈਟਰਿਕਸ-ਗਣਿਤ ਦੀ ਮੁੱਖ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਘਾਤੀ ਸਮਕਰਨੀ ਪ੍ਰਬੰਧ ਅਤੇ ਸਮਕਲੀਨ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ-ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਲਈ, ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਬਹੁ-ਵਾਚੀ ਹੋਣਾ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਇਹ ਜਾਨਣਾ ਕਿ ਉਹ ਬਹੁਵਾਚੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਾ ਪੂਰਾ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਉਹ ਸ਼ਰਤਾਂ ਹਨ : ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਰਗ ਹੋਵੇ, ਤੇ ਦੂਜੇ, ਉਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਜਾਂ ਖਾਨੇ ਆਪਸ 'ਚ ਅਟੰਕ ਹੋਣ। ਦਰਅਸਲ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਬਹੁਵਾਚੀ ਗੁਣ ਸਹਿਜ ਹੀ ਨਿਰਧਾਰਨ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਜਾਂ ਉਲਟ ਲੱਭਣ ਲਈ ਵੀ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਆਰਥਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਾਸਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਪੂਰਾ ਲਾਭ ਉਠਾਉਣ ਲਈ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਤੋਂ ਭਾਵ ਉਹ ਸਕੇਲਰ ਅੰਕ ਹੈ ਜੋ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

[A determinant is a number (Scalar Quantity) associated to a square matrix.]

ਇਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਇਕ ਮੈਟਰਿਕਸ ਲਿਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :-

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

ਅਰਥਾਤ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨੂੰ ਦੋ ਸਿੱਧੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨਿਰਧਾਰਿਕ Δ (ਡੈਲਟਾ) ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਾਲ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਕ੍ਰਮ

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਵੀ 1×1 ਤੋਂ ਲੈ ਕੇ, $m \times m$ ਜਾਂ $n \times n$ ਤੱਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਇਥੇ ਧਿਆਨ ਰੱਖਣ ਯੋਗ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਕੇਵਲ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾ ਰਹੀਆਂ ਹਨ :

(i) $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (ii) $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{3\times 3}$

ਅਤੇ (iii) $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12\ldots} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22\ldots} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

ਪਹਿਲਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ 2×2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ, ਦੂਜਾ 3×3 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਤੇ ਤੀਜਾ $n \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੈ। ਇਥੇ n ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਿਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅੰਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ (2×2) ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੱਸੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ।

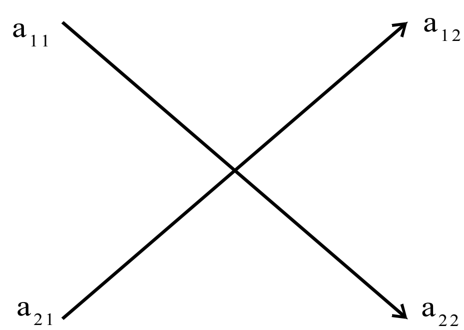
ਫਰਜ਼ ਕਰੋ $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ਤਾਂ $|A|$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$

ਇਸੇ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪੜਾਅ ਹਨ :

ਪੜਾਅ 1

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਲਓ।



ਪੜਾਅ 2

ਤੀਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ 'ਚ ਗੁਣਾਂ ਕਰ ਦਿਉ। ਭਾਵ a_{11} ਨੂੰ a_{22} ਨਾਲ ਅਤੇ a_{21} ਨੂੰ a_{12} ਨਾਲ। ਹੁਣ ਸਮੱਸਿਆ ਰਹਿ ਗਈ ਢੁਕਵੇਂ ਬੀਜ-ਗਣਿਤਕ ਨਿਸ਼ਾਨ ਲਾਉਣ ਦੀ। ਜੋ ਤੀਰ ਨੀਚੇ ਵੱਲ ਨੂੰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ + (ਜਮ੍ਹਾਂ) ਦਾ ਅਤੇ ਜੋ ਤੀਰ ਉਪਰ ਵੱਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਸ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ (ਮਨਫੀ) ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ ਲਾ ਦਿਉ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਇੱਕ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਇਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿੱਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ।

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 10 \times 5 - 8 \times 4 = 50 - 32 = 18$$

ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ

ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤਾ

ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਇਥੇ ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਨਿਰਧਾਰਿਕਾਂ ਵਿਚ ਵੰਡਣਾ ਪਏਗਾ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ :–

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

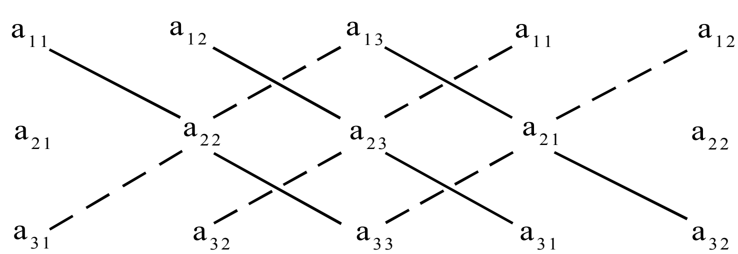
$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad +a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22})$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22}$$

ਪਿੱਛੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਦਾ $|A|$ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਲਈ ਹੈ। ਪਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਕਾਲਮ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਖਿਆਲ ਕੇਵਲ ਇੰਨਾਂ ਰੱਖਣਾ ਹੈ ਕਿ ਜਿਹੜੀ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਜਿਹੜੇ ਕਾਲਮ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨਾ ਹੈ ਹਰ ਵਾਰ ਉਸ ਪੰਕਤੀ ਜਾਂ ਖਾਨੇ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਜਾਂ ਹੇਠਲੇ ਉਪਰਲੇ ਅੰਸ਼ ਨੂੰ ਕੱਟ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪਿਛੇ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ 'ਚ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਦਰਅਸਲ ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵੀ ਤਰੀਕਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧਾ ਤਰੀਕਾ (Direct Method) ਜਾਂ ਸਾਰਸ ਦਾ ਚਿੱਤਰ (Sarrus Diagram) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤਰੀਕਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :



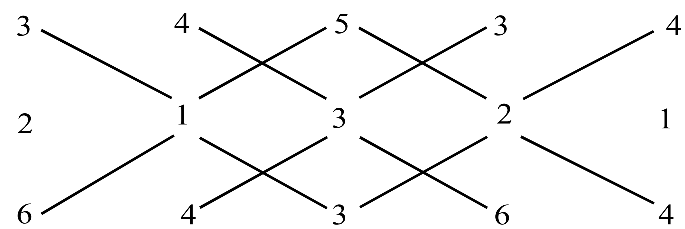
(Sarrus Diagram)

ਤਰੀਕਾ :

ਅਟੁੱਟਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਰਾਹੀਂ ਮਿਲਾਏ ਗਏ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ 'ਚ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਜੋੜ ਲਵੋ ਅਰਥਾਤ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਏ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਜਮ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ ਦਿਉ ਤੇ ਟੁੱਟਵੀਆਂ ਜਾਂ ਲੜੀਵਾਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਰਾਹੀਂ ਮਿਲਾਏ ਗਏ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ 'ਚ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਮਨਫੀ ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ ਲਾਉ। ਜੋ ਨਤੀਜਾ ਆਏਗਾ, ਉਹ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪਰ ਇਹ ਨਿਯਮ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਤਿੰਨ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਤੇ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਸ ਲਈ Laplace ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਪਰ ਉਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅੱਗੇ ਇਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ Sarrus diagram ਦੀ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ।

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$



$= 9 + 72 + 40 - 30 - 36 - 24 = 121 - 90 = 31$

Laplace's Expansion Method

ਉਚੇ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਲਈ Laplace ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਤਰੀਕਾ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਸਹਿਖੰਡ (cofactor) ਅਤੇ ਲਘੂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ (minor) ਤੇ ਆਧਾਰਤ ਹੈ।

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ 'ਲਘੂ' (Minor of a Matrix) : ਲਘੂ ਦਾ ਸ਼ਬਦੀ ਮਤਲਬ ਤਾਂ ਛੋਟਾ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਥੇ 'ਲਘੂ' ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਮੈਟਰਿਕਸ 'ਚੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਛੋਟਾ ਮੈਟਰਿਕਸ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ 'ਚੋਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਤੇ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਖਾਨੇ (ਭਾਵੇਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਖਾਨਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਗਿਣਤੀ ਲੈ ਕੇ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਤੇ ਖਾਨਿਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡਕੇ) ਲੈ ਕੇ ਜੋ ਮੈਟਰਿਕਸ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਲਘੂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਜਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਲਘੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਲਘੂ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਲਘੂ-ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿਚ ਹਰ ਅੰਸ਼ ਦਾ ਇਕ ਲਘੂ ਮੈਟਰਿਕਸ (ਲਘੂ-ਨਿਰਧਾਰਿਕ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਉਸ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਕਾਲਮ ਨੂੰ, ਜਿਸ ਵਿਚ ਉਹ ਮੌਜੂਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਮਿਟਾ ਕੇ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਫਰਜ਼ ਕਰੋ $|A| = |a_{ij}|_{3\times3}$ ਹੈ।

ਭਾਵ $i = j = 1, 2, 3$ ਇਥੇ aij ਇੱਕ ਅੰਸ਼ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ A ਦੀ i th ਪੰਕਤੀ ਤੇ j th ਕਾਲਮ 'ਚ ਹੈ। ਹੁਣ a ਲਘੂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 2×2 ਹੋਵੇਗਾ ਤੇ ਜਿਹੜਾ ith ਪੰਕਤੀ ਤੇ jth ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਅਲੋਪ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਵਿਆਖਿਆ : ਫਰਜ਼ ਕਰੋ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{3\times3}$$

ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਜਿੰਨੇ ਅੰਸ਼ ਹਨ, ਉਨੇ ਹੀ 'ਲਘੂ' ਹੋਣਗੇ। ਜਿਵੇਂ aij ਦੇ ਲਘੂ Mij ਨਾਲ ਨਿਰਧਾਰਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ Mji ਵੀ ਇਕ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਹੀ ਹੈ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 2×2 ਹੋਵੇਗਾ ਸੰਕੇਤਕ ਲਿੱਪੀ 'ਚ $|M_{ij}|_{2\times2}$, a_{ij} ਦਾ 'ਲਘੂ' ਹੈ।

a_{11} ਦਾ ਲਘੂ $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

a_{12} ਦਾ ਲਘੂ $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ ਅਤੇ

a_{13} ਦਾ ਲਘੂ $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਾਕੀ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ 'ਲਘੂ' ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਿਖਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਸਨ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਬਾਕੀ ਦੇ 'ਲਘੂ' ਲੱਭਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਸਹਿ ਖੰਡ (Co-factor)

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਸ਼ aij ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਉਸ ਅੰਸ਼ ਦਾ ਪੂਰਕ 'ਲਘੂ' ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਢੁਕਵਾਂ ਜਮ੍ਹਾਂ ਜਾਂ ਮਨਫੀ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਲਗਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ 'ਚ aij ਦੇ ਲਘੂ ਨੂੰ $(-1)^{i+j}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਉਸ ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ aij ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਉਸ ਦੇ ਤਦਸਥਾਨੀ ਵੱਡੇ ਅੱਖਰ Aij ਨਾਲ ਚਿੰਨ੍ਹਾਤਮਕ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ 'ਚ aij ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :-

$$Aij = (-1)^{i+j} \left|M_{ij}\right|$$

ਜਿਥੇ i ਅਤੇ j ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪੰਕਤੀ ਤੇ ਖਾਨੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਕਿਸੇ ਵੀ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ (ਸਹਿ-ਖੰਡ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ) ਕਰਨ ਦਾ ਆਮ ਤਰੀਕਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:-

ਫਰਜ਼ ਕਰੋ A ਇੱਕ ਵਰਗ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਪੰਕਤੀ (ith ਪੰਕਤੀ ਸਥਿਰ ਮੰਨ ਕੇ) ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਨਿਰਧਾਰਕ $|A| = \sum_{i=1}^{n} aij \quad Aij$

ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕਾਲਮ j (jth ਕਾਲਮ ਸਥਿਰ ਮੰਨ ਕੇ) ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ।

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} aij \quad Aij$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \qquad = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਤਰ ਵਰਤ ਕੇ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$|A| = 4\ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} \quad +5\ (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad +7(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$= 4\ (0 - 16) - 5\ (0 - 2) + 7\ (48 - 3)$

$= - 64 + 10 + 315 = 261$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਦੂਜੀ ਅਤੇ ਤੀਜੀ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਜਾਂ ਤੀਜੇ ਕਾਲਮ ਰਾਹੀਂ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਕੰਮ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ :

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Determinants)

ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਕੁਝ ਆਧਾਰਭੂਤ ਗੁਣ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਸਦਕਾ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੋਰ ਵੀ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1. ਕਿਸੇ ਵੀ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ ਕਾਲਮਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ 'ਚ ਬਦਲਣ (ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼) ਨਾਲ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਮੁੱਲ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ : i.e. $|A| = |A^1|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 5 \times 3 = 8 - 15 = - 7$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 5 \times 3 = 8 - 15 = - 7$$

2. ਜੇ ਕਿਸੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀਆਂ ਦੋ ਪੰਕਤੀਆਂ (ਜਾਂ ਦੋ ਕਾਲਮ) ਆਪਸ 'ਚ ਬਦਲੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਵੀ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਸੰਖਿਆਤਮਿਕ ਕੀਮਤ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ, ਪਰ ਉਸ ਦਾ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਸ਼ਾਨ ਜ਼ਰੂਰ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14 \qquad \text{ਪਰ} \qquad \begin{vmatrix} 3 & \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

3. ਜੇਕਰ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਪੰਕਤੀ (ਜ5 ਕਾਲਮ) ਨੂੰ p ਸਥਾਨਾਂ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ, ਉੱਪਰ (ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਜਾਂ ਖੱਬੇ) ਸਰਕਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਕੀਮਤ ਤਾਂ ਉਨੀ ਹੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਵੀ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ p ਜਿਸਤ (even) ਹੋਵੇ, ਪਰ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਸ਼ਾਨੀ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ p ਟਾਂਕ (odd) ਹੋਵੇ ।

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

ਹੁਣ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਅਤੇ ਤੀਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੀ ਥਾਂ ਬਦਲੀ ਰਾਹੀਂ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੰਕਤੀ ਨੂੰ ਇਕ ਥਾਂ ਹੇਠਾਂ ਬਦਲ ਕੇ ਜਾਂ ਕਾਲਮ ਨੂੰ ਬਦਲਕੇ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਈ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

4. ਜੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਇਕ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਖਾਨਾਂ) ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ਇਸ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰਨ ਲਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

5. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਕਿਸੇ ਇਕ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅੰਕ 'k' ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਵੀ k ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਫਰਜ਼ ਕਰੋ

$k = 2$ ਅਤੇ $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ਤਾਂ $|A| = 12 - 10 = 2$

ਹੁਣ $2|A| = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 20 = 4$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ A $(k = 2)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ।

6. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਇਕ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਇਕ ਕਾਲਮ) ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੀ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਿਫਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਆਪਣੇ ਪੱਧਰ ਤੇ ਕਰਨ।

7. ਜੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਪੰਕਤੀਆਂ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਇੰਨ-ਬਿੰਨ ਇਕੋ ਜਿਹੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 6 = 0$$

8. ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਇਕ ਪੰਕਤੀ ਵਿਚ ਕਿਸੇ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜੋੜਨ (ਘਟਾਉਣ) ਤੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ। ਮੰਨ ਲਵੋ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ

$$|A| - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 8 - 3 = 5$$

ਹੁਣ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਨੂੰ ਦੋ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਦੂਜੀ ਵਿਚ ਜੋੜ ਦਿਓ

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1+4 & 4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = 20 - 15 = 5$$

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ 'ਚ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦਾ ਦੋ ਗੁਣਾਂ ਘਟਾ ਕੇ ਵੀ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

9 ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀ ਜੇਕਰ ਇਕ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅੰਕ λ ਨਾਲ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਅੰਕ μ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਵੇਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀ ਕੀਮਤ $\lambda \mu |A|$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਈ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਖੁਦ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਨੋਟ : ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਕਿਤਾਬਾਂ ਉਹੀ ਹਨ ਜੋ 11 ਨੰ: ਪਾਠ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿਚ ਲਿਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਮਾਲਾ

1. ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਅਰਥ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ।

2. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

ਤਾਂ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਦਸੋ।

3. ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਦੋ ਤਰੀਕਿਆਂ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠਲੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੱਢੋ ਅਤੇ ਚੈੱਕ ਕਰੋ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਨਤੀਜਾ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ :

(i) $= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 10 & 14 & 18 \end{bmatrix}$

4. ਹੇਠਲੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦਾ ਬਿਨਾਂ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤੇ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਉਂ

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ਪਾਠ ਨੰ : 2.3 ਲੇਖਕ : ਡਾ. ਰਣਜੀਤ ਸਿੰਘ ਘੁੰਮਣ

ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਅਤੇ ਦਰਜਾ
(Inverse and Rank of Matrices)

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਾਠਾਂ 'ਚ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ ਕਿ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਪੜ੍ਹਨ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੰਤਵ ਇਸ ਨੂੰ ਆਰਥਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿੱਚ ਲਾਗੂ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਆਰਥਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਚ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਬੀਜ-ਗਣਿਤ ਮੁੱਖ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਘਾਤੀ ਸਮਕਾਲੀਨ ਸਮੀਕਰਨ ਪ੍ਰਬੰਧ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੰਤਵ ਲਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦਰਜਾ (ਅਨੁਸਥਿਤੀ) ਅਤੇ ਵਿਪਰੀਤ ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਦਰਜੇ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਇੱਕ-ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਪ੍ਰਬੰਧ ਦੇ ਹੱਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਪਰੀਤ (inverse) ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਕ-ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਪ੍ਰਬੰਧ ਦੇ ਹੱਲ ਲਈ ਵਿਪਰੀਤ ਮੈਟਰਿਕਸ ਢੰਗ (Inverse Matrix Method) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਅਤੇ ਦਰਜਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਬਹੁਤ ਜ਼ਰੂਰੀ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ (Inverse of a Matrix) ਜਾਂ ਉਲਟ-ਕ੍ਰਮ-ਮੈਟਰਿਕਸ

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਦੋ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(i) ਐਡਜਾਇੰਟ (Adjoint) ਦਾ ਤਰੀਕਾ

(ii) Gauss-reduction ਦਾ ਤਰੀਕਾ

(i) ਐਡਜਾਇੰਟ (Adjoint) ਦਾ ਤਰੀਕਾ

ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਬਹੁਵਾਚੀ (non-singular) ਹੋਵੇ, ਅਰਥਾਤ $|A| \neq 0$, ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ft gohs ~ glGKFs eoBk ; Bt j ' ; edk j ? fJ; dk ft gohs (A^{-1}) ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A \qquad (|A| \neq 0)$$

A ਦਾ ਸਲੰਗਨ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਸਹਿ-ਖੰਡਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼। ਇਸ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਕ n x n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ਾਂ (aij) ਦਾ ਇਕ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਹੋਵੇਗਾ (Cij) ਅਤੇ [aij] ਨੂੰ [Cij] ਨਾਲ ਬਦਲ ਕੇ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਦਾ ਇੱਕ ਮੈਟਰਿਕਸ ਬਣਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ C = [Cij] ਨਾਲ

ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। C ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ (C') ਹੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਅੱਗੇ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

$$C_{n\times n} = \text{adj}\,A = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{12}| & \dots & |C_{1n}| \\ |C_{21}| & |C_{22}| & \dots & |C_{2n}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |C_{n1}| & |C_{n2}| & \dots & |C_{nn}| \end{bmatrix}^1$$

$$= \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & \dots & |C_{n1}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & \dots & |C_{n2}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |C_{1n}| & |C_{2n}| & \dots & |C_{nn}| \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

ਹੁਣ ਸਮੁਦਾਇ (expression) (3) ਨੂੰ $|A|$ ਨਾਲ ਵੰਡ ਦਿਓ, ਅਰਥਾਤ ਸਮੁਦਾਇ (3) ਦਾ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ $|A|$ ਨਾਲ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ ਜੋ ਮੈਟਰਿਕਸ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਆਵੇਗਾ ਉਹੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਹੋਵੇਗਾ (A^{-1}) ਅਤੇ ਇਸ ਵਿਚ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਗੁਣ ਹੋਵੇਗਾ :

$AA^{-1} = I$

ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ : ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਲੱਭਣ ਦਾ ਆਮ ਤਰੀਕਾ ਹੇਠਾਂ ਦਿਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਚਾਰ ਪੜਾਅ ਹਨ :

(i) ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ $|A|$ ਲੱਭੋ ਪਰ ਇਥੇ ਇਹ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਯੋਗ ਗੱਲ ਹੈ ਕਿ $|A| \neq 0$ ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਨਹੀਂ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ।

(ii) ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਤੇ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਲੱਭੋ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਇਕ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ 'ਚ ਲਿਖੋ $C = |Cij|$

(iii) C ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਲਿਖੋ ਜੋ ਕਿ A ਦਾ ਸਹਿ-ਖੰਡ ਜਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ adj A ਹੋਵੇਗਾ।

(iv) adj A ਨੂੰ $|A|$ ਨਾਲ ਵੰਡੋ। ਫਲਸਰੂਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਮੈਟਰਿਕਸ A^{-1} ਹੋਵੇਗਾ।

ਨੋਟ :- ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਲੱਭਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੋ ਗੱਲਾਂ ਦਾ ਧਿਆਨ ਰੱਖਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ :

(i) ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਵੇ (ii) ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਸਿਫ਼ਰ (zero) ਨਾ ਹੋਵੇ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਨਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇਕ ਦੇ ਵੀ ਨਾ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਰਤ ਵਿੱਚ ਉਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ

ਨਹੀਂ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ।

ਉਦਾਹਰਣ : ਉਪਰੋਕਤ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \quad -1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad +0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 3\ (8 - 10) - 1\ (2 - 15) + 0 = -6 + 13 + 0 = 7 \neq 0$

(ii) and (iii) ਸਹਿ–ਖੰਡ ਮੈਟਰਿਕਸ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ, ਅਰਥਾਤ adj A

$$|Cij| = \text{adj A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^1$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 13 & 6 & -15 \\ -10 & -3 & 11 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} -2 & 13 & -10 \\ -2 & 6 & -3 \\ 5 & -15 & 11 \end{bmatrix}$$

(iv) $$A^{-1} = \frac{\text{adj A}}{|A|} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 13 & -10 \\ -2 & +6 & -3 \\ 5 & -15 & 11 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

ਇੰਨਾਂ ਕੁਝ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਚੈੱਕ ਕਰ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ A^{-1} ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਸੌਟੀ ਤੇ ਪੂਰਾ ਉਤਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਨਹੀਂ। ਜੇ ਪੂਰਾ ਉਤਰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ A^{-1} ਠੀਕ ਹੈ। ਜੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸਮਝੋ ਗਲਤ ਹੈ।

$AA^{-1} = I$

$$\text{i.e.}\begin{bmatrix}3 & 1 & 3\\1 & 4 & 2\\0 & 5 & 2\end{bmatrix}\times\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-2 & 13 & -10\\-2 & 6 & -3\\5 & -15 & 11\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}7 & 0 & 0\\0 & 7 & 0\\0 & 0 & 7\end{bmatrix}=1_{3\times3}$$

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਨੂੰ ਚੈੱਕ ਕਰ ਲੈਣ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ i.e. $A^{-1}A$ ਵੀ ਲੱਭੋ ਤੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਇਹ $I_{3\times3}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਨਹੀਂ।

ਮੈਟਰਿਕਸ ਵਿਪਰੀਤ ਦੇ ਗੁਣ

1. ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ $A_{n\times n}$ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਹੋਵੇ (i.e. A^{-1} exists), ਵਿਪਰੀਤ ਇੱਕੋ ਇੱਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਫਰਜ਼ ਕਰੋ ਕਿ A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ B ਅਤੇ C ਇਸ ਦੇ ਦੋ ਵਿਪਰੀਤ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ B ਵੀ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਹੈ, $AB = BA = I$ …………… (i)

C ਵੀ A ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਹੈ, $AC = CA = I$ …………… (ii)

ਹੁਣ ਕਿਉਂਕਿ ABC ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਗੁਣਨਫਲ CAB ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$CAB = C(AB) = C1 = C$ (i) (ਤੋਂ) …………… (iii)

$CAB = (CA).B = 1B = B$ (ii) (ਤੋਂ) …………… (iv)

(iii) ਅਤੇ (iv) ਤੋਂ $C = B$

ਇਸ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ (ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਹੋਂਦ 'ਚ ਹੋਵੇ) ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਇੱਕੋ-ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

2. ਦੋ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਉਨ੍ਹਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਇਸ ਨੂੰ ਵਿਪਰੀਤ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਉਲਟ ਨਿਯਮ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)

ਸੰਕੇਤਕ ਲਿੱਪੀ ਵਿਚ

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ਬਸ਼ਰਤੇ ਕਿ A ਅਤੇ B ਦੋਨੋਂ ਬਹੁਵਾਚੀ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟਰਿਸਜ ਹੋਣ।

ਸਬੂਤ $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

$= A1A^{-1} = I \quad (\because BB^{-1} = 1)$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $(B^{-1}A^{-1})(AB) = 1$

$B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = I$

ਵਿਪਰੀਤ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3. ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਉਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤ ਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$(A^1)^{-1} = (A^{-1})^1$

ਸਬੂਤ : ਵਿਪਰੀਤ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$AA^{-1} = A^{-1}A = 1$

$(AA^{-1}) = (A^{-1}A)' = 1'$

$(A^{-1})A' =' A(A^{-1}) = 1'$

$(A^{-1}) = (A')^{-1}\ '(A)^{-1} = (A')^{-1}$

4. ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ ਉਹੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

ਅਰਥਾਤ $(A^{-1})^{-1} = A$

ਸਬੂਤ : ਵਿਪਰੀਤ ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ

$(A^{-1})\ (A^{-1})^{-1} = 1$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਨਾਲ ਪੂਰਵ-ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਨਾਲ

$AA^{-1}\ (A^{-1}) = 1$

$[(A^{-1})^{-1} = A]$

$(A^{-1})^{-1} = A$

ਇਸ ਪਾਠ 'ਚ ਦੂਜਾ ਪੱਖ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਦਰਜੇ (Rank) ਲੈ ਰਹੇ ਹਾਂ।

(ii) Gauss Elimination method/Gauss-reduction method :

If A is a square matrix of order n, I is an identity matrix of order n, then a particular form of new matrix : [A/I] (by placing I matrix by the side of matrix A) is of order n × n.
A has inverse only and only if [A/I] can be transformed to $[I/A^{-1}]$
The method thus consists in placing an identity matrix of the same order along side the original matrix A which is required to be investigated. Then by performing the same row elementary transformations on both A and I portions, we can transform (reduce) A into an identity matrix ; this transformed identity matrix will then become the inverse matrix.

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵਿਪਰੀਤ **Gauss-reduction method** ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A / I] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{Use } R1 \qquad R_1 \rightarrow \frac{R_1}{2}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Use } R_2\text{-}R_1,\ R_3\text{-}3R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}, \text{Use } R_1 \rightarrow \quad R_1 + R_2, R_3 - 7R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}, \text{ Use} \frac{R_3}{27}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

$\sim \ [I/A^{-1}]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ +\frac{2}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

If we multiply A A^{-1} i.e.

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{6}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

We get $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hence $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ is inverse of $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

[**Important Note :** Always remember that **only row transformations** are to be performed for finding inverse method by Gauss Elimination Method.]

B. Co-factor Method

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦਰਜਾ (Rank of Matrix)

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਦਰਜੇ ਸੰਬੰਧੀ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਤਾਂ ਅਟੰਕ (Independent) ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਂ ਨਾਲ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਅਰਤਰ (ਕ੍ਰਮ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ) ਦੇ ਨਾਂ ਨਾਲ ਜਾਣੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਪਹਿਲੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਦਰਜੇ ਤੋਂ ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ (ਕਾਲਮਾਂ) ਦੀ ਉਹ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਹੈ ਜਿਹੜੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ (ਕਾਲਮਾਂ) ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੋਂ ਇਕ-ਘਾਤੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੁਤੰਤਰ (linearly independent) ਹੋਣ।

ਦੂਜੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਦਰਜੇ ਤੋਂ ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ $A_{m\times n}$ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਲਘੂ ਮੈਟਰਿਕਸ (ਜਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਕ) ਜੋ ਸਿਫ਼ਰ (zero) ਨਾ ਹੋਵੇ, ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦਰਜਾ ਉਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਜਾਂ ਕਾਲਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚੋਂ ਜੋ ਵੀ ਘੱਟ ਹੋਵੇ) ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਜੇਕਰ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਈਆਂ (ਜੋ ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਪਾਠ 'ਚ ਦੱਸੀਆਂ ਜਾ ਚੁੱਕੀਆਂ ਹਨ) ਨੂੰ ਧਿਆਨ 'ਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਦੇਖਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਇਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਅਤੇ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ ਦਰਜੇ ਨੂੰ (rho) (A) ਜਾਂ φ (A) ਜਾਂ r ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਦੂਜੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਵੀ ਬਿਆਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਹੁਵਾਚੀ (non-zero) ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਦਰਜਾ ਹੋਵੇਗਾ r ਜੇਕਰ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਬ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੋਵੇ ਜਿਸਦਾ ਕ੍ਰਮ r ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਹੜਾ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਹੋਰ ਕੋਈ ਵੀ ਅਜਿਹਾ ਸਬ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਨਾ ਹੋਵੇ ਜਿਸ ਦਾ

ਕ੍ਰਮ $r \times 1$ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਉਚਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਹੜਾ ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\varphi (A) = r$

ਕਿਸੇ ਵੀ $A_{m\times n}$ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦਰਜਾ m ਜਾਂ n (ਜਿਹੜਾ ਵੀ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚੋਂ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇ) ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਕ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਤਾਂ ਕੇਵਲ ਵਰਗ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਕ 3×5 ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਸੰਭਵ ਨਿਰਧਾਰਿਕ (ਭਾਵੇਂ ਉਹ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ ਤੇ ਭਾਵੇਂ ਨਾ) 3×3 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ 'ਚ ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$p (A) \leq mn (m, n)$

ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਦਰਜਾ m ਅਤੇ n ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸੈੱਟ ਵਿਚੋਂ ਜਿਹੜਾ ਵੀ ਛੋਟੇ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ ਫਿਰ ਉਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਨੋਟ : (i) ਇੱਕ $n \times n$ ਮੈਟਰਿਕਸ Ap (ਜੋ ਸਿਫਰ ਨਾ ਹੋਵੇ) ਦਾ ਦਰਜਾ ਜ਼ਰੂਰ n ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ 'ਚ $p (A) = n$ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇਕ ਸਿਫ਼ਰ null ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦਰਜਾ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

i.e. $p (O) = O$

(iii) ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਦਰਜਾ ਉਸਦੇ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਦੇ ਦਰਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਦਰਜੇ ਤੇ ਕੋਈ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਪੈਂਦਾ।

i.e. $P (A) = p (A')$

(iv) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਕ੍ਰਮ $(r + 1)$ ਦਾ ਹਰੇਕ ਸਬ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $p (A) \leq r$

(v) ਜੇਕਰ A ਦਾ ਕੋਈ r ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਬ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $p (A) \geq r$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦਰਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 9 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

ਇਸ ਦੇ 3×3 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਬ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਬਣਦੇ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 6 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \\ 9 & 9 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$ ਅਤੇ

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$ ਇਹ ਸਬ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਹਰ ਵਾਰੀ ਇੱਕ ਕਾਲਮ ਅਲੋਪ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਾਰਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਸਿਫ਼ਰ ਸਨ। ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਇਹ ਚੈੱਕ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਦਰਜਾ 3 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਲਈ ਹੁਣ ਇਹ ਦੇਖਣਾ ਪਏਗਾ ਕਿ 2×2 ਦਾ ਕੋਈ ਸਬ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦੇ (2×2) ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੇ 18 ਸਬ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਬਣਦੇ ਹਨ

(ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਸਬ-ਮੈਟਰਿਕਸ ਬਣਾ ਕੇ ਦੇਖਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ) ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚੋਂ ਇਕ

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਦਰਜਾ 2 ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦਰਜਾ ਨਿਰਧਾਰਣ ਕਰਨਾ (ਖਾਸ ਕਰਕੇ ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਮੈਟਰਿਕਸ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ) ਕਾਫ਼ੀ ਮੁਸ਼ਕਲ ਕੰਮ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦਰਜਾ ਗਿਆਤ ਕਰਨ ਦਾ ਦੂਜਾ ਤਰੀਕਾ, ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਨਾਲੋਂ ਆਸਾਨ ਹੈ, ਦਿਤੇ ਹੋਏ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਜਾਂ ਕਾਲਮਾਂ ਤੇ ਕੁਝ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਕਰਕੇ ਇਕ ਅਜਿਹਾ ਮੁੱਢਲਾ ਮੈਟਰਿਕਸ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ ਜੋ ਹੇਠ ਦਿਤੇ ਰੂਪ 'ਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ। ਹੇਠਾਂ ਤਿੰਨੇ ਕਿਸਮ ਦੇ ਮੁੱਢਲੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਿਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ, ਜੋ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ A_1 ਦਾ ਦਰਜਾ 3, A_2 ਦਾ ਦਰਜਾ 4, ਅਤੇ A_3 ਦਾ ਦਰਜਾ 2 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ A_1 'ਚ ਤਿੰਨ ਪੰਕਤੀਆਂ, A_2 'ਚ 4 ਪੰਕਤੀਆਂ ਅਤੇ A_3 'ਚ 2 ਪੰਕਤੀਆਂ ਆਪਸ 'ਚ ਅਟੰਕ (linearly independent) ਹਨ। ਮੈਟਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ'ਚ ਲਿਖਣ (ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ) ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :-

(i) ਹਰ ਇੱਕ ਅਸਿਫਰ ਪੰਕਤੀ ਦਾ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸਿਫ਼ਰ ਅੰਸ਼ 1 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

(ii) ਇਸ ਅੰਸ਼ '1' ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਉਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ 'ਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

(iii) ਸਾਰੇ ਸਿਫ਼ਰ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਦੂਜੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਕਤੀਆਂ ਤੋਂ (ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ) ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਜਾਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ਸੁਆਲ ਇਹ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਕਿਹੜੀਆਂ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਸਦਕਾ ਦਿਤੇ ਹੋਏ ਮੈਟਰਿਕਸ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਮੁਢਲੀ (elementary) ਫੌਰਮ (form) 'ਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਹਨ :

(i) ਕੋਈ ਦੋ ਪੰਕਤੀਆਂ (ਜਾਂ ਦੋ ਕਾਲਮਾਂ) ਦੀ ਆਪਸ 'ਚ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀ।

(ii) ਕਿਸੇ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਕੇਲਰ (non-zero) ਅੰਕ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨਾ।

(iii) ਕਿਸੇ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਪੰਕਤੀ (ਜਾਂ ਕਾਲਮ) ਦੇ ਤਦ-ਸਥਾਨੀ ਅੰਸ਼ਾਂ 'ਚ ਜੋੜਨਾ।

ਉਪਰੋਕਤ ਤਿੰਨੇ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ 2 'ਚ ਦੱਸੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਤੇ ਆਧਾਰਤ ਹਨ (ਨੋਟ : ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦਰਜਾ ਉਸ ਤੇ ਲਾਗੂ ਕੀਤੀਆਂ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ) ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਰਾਹੀ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਤਬਦੀਲੀਆਂ ਲਈ ਵਰਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :-

(i) R_{ij} ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ith ਅਤੇ jth ਪੰਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਆਪਸ 'ਚ ਬਦਲਣਾ ਅਤੇ Cij ਤੋਂ ਭਾਵ ith ਅਤੇ jth ਕਾਲਮਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ 'ਚ ਬਦਲਣਾ।

(ii) Ri(j) ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਪੰਕਤੀ ith ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ k ਅੰਕ $(k \neq 0)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨਾ ਅਤੇ C_1 (K) ith ਤੋਂ ਭਾਵ ith ਕਾਲਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ K $(k \neq 0)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨਾ।

(iii) Rij (k) ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ jth ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅੰਕ k $(k \neq 0)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ith ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਤਦ-ਸਥਾਨੀ ਅੰਸ਼ 'ਚ ਜੋੜਨਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਕ੍ਰਿਆ Rij (k), jth ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਤੇ ਕੋਈ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਪਾਏਗੀ। Cij (k) ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ jth ਕਾਲਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅੰਕ k $(k \neq 0)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ith ਕਾਲਮ ਦੇ ਤਦ-ਸਥਾਨੀ ਅੰਸ਼ਾਂ 'ਚ ਜੋੜਨਾ।

ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਮੈਟਰਿਸਜ਼ (Equivalent Matrices)

ਦੋ ਮੈਟਰਿਸਜ A ਅਤੇ B ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਾਨਾਰਥੀ $(A \sim B)$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇ ਇੱਕ ਤੇ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਕਰਕੇ ਦੂਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ। ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਦਰਜਾ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਤੀਜੇ ਬਿਲਕੁਲ ਸਪਸ਼ਟ ਹਨ :

(a) ਹਰੇਕ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਆਪਣੇ ਆਪ ਦਾ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ $A \sim A$

(b) ਜੇ ਕੋਈ ਮੈਟਰਿਕਸ B ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ A ਵੀ B ਦਾ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਅਰਥਾਤ $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

(c) ਜੇ ਕੋਈ ਮੈਟਰਿਕਸ C, B ਦਾ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਹੋਵੇ ਅਤੇ B, A ਦਾ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ C, A ਦਾ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਹੋਵੇਗਾ ਅਰਥਾਤ, ਜੇ $A \sim B$ ਅਤੇ $B \sim C \Rightarrow A \sim C$

(d) ਜੇਕਰ A ਅਤੇ C ਕਿਸੇ ਮੈਟਰਿਕਸ B ਨਾਲ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅੱਗੇ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾ ਰਹੀਆਂ ਹਨ :

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix} (\text{Use } R_{13}) \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} (\text{Use } C_{13})$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix} (\text{Use } R_{13}) \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} (\text{Use } R_{13})$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 7-7 & 8 \\ 4 & 5-28 & 6 \\ 3 & 2-21 & 9 \end{bmatrix} (\text{Use } C_2 \to C_2 - 7C_1) \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 4 & 23 & 6 \\ 3 & -19 & 9 \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਇਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਾਨਾਰਥੀ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਤੇ ਕੁਝ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਸਧਾਰਣ ਰੂਪ (Normal form of a matrix)

ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟਰਿਕਸ $(A)_{m\times n}$ ਤੇ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਕਰਕੇ ਉਸ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੂਪ 'ਚ ਲਿਆਂਦਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{0} \end{bmatrix} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \begin{bmatrix} 1_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਜਦ ਕਿ 1_r ਇੱਕ ਯੂਨਿਟ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ $r \times r\ (r > 0)$ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ 1_r ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੀ ਉਸਦਾ ਦਰਜਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਦੋਹਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਹੀ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਦਰਜਾ ਗਿਆਤ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਉਦਾਹਰਣ : ਹੇਠਲੇ ਮੈਟਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ ਦਾ ਦੋਵਾਂ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਦਰਜਾ ਗਿਆਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 3×4 ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਉੱਚੇ ਤੋਂ ਉੱਚਾ ਸੰਭਵ ਦਰਜਾ 3 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ 3×3 ਦੇ ਚਾਰ ਲਘੂ ਬਣਦੇ ਹਨ।

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ਅਤੇ}$$

$$\text{(iv)} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਆਉ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਦੇਖੀਏ

(i) $$2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} -5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} +6\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 2\ (12 - 4) - 5\ (4 - 2) + 6\ (2 - 3) = 16 - 10 - 6 = 0$

(ii) $$2\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$= 2\ (12 - 12) - 1\ (20 - 20) + 1\ (30 - 30) = 0$

(iii) $$2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$= 2\ (8 - 24) - 1\ (24 - 40) + 1\ (36 - 20) = - 32 + 16 + 16 = 0$

(iv) $$5\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} -3\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$= 5\ (8 - 24) - 3\ (24 - 40) + 2\ (36 - 20) = -80 + 48 + 32 = 0$

ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ 3×3 ਦੇ ਸਾਰੇ ਲਘੂ ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $p\ (A) < 3$

ਆਓ ਹੁਣ ਇਸ ਦੇ 2×2 ਲਘੂ ਬਣਾਈਏ ਜੋ 18 ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :–

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$ ਆਦਿ

ਹੁਣ $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਈ ਹੋਰ ਲਘੂ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੇ, ਪਰ ਸਾਨੂੰ ਤਾਂ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਲਘੂ ਅਜਿਹਾ ਮਿਲਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਨਿਰਧਾਰਿਕ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਵੇ (ਤੇ ਉਹ ਮਿਲ ਗਿਆ ਹੈ) ਇਸ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਦਰਜਾ (rank) 2 ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $P\ (A) = 2$

ਦੂਜਾ ਤਰੀਕਾ : ਮੈਟਰਿਕਸ A ਤੇ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਕਰਕੇ ਉਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਰੰਭਿਕ ਮੈਟਰਿਕਸ (Elementary Matrix) ਜਾਂ ਸਾਧਾਰਣ ਮੈਟਰਿਕਸ (Normal form of Matrix) ਦੇ ਰੂਪ 'ਚ ਲਿਆਉਣਾ।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ by } R_{12}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{by } C_2 - 3C_1,\ C_3 - 2C_1,\ C_4 - 6C_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{by } R_2 - 2R_1,\ R_3 - R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{by } - R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ by } C_3 + 2C_2,\ C_4 + C_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{by } R_3 + R_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sim B$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ P (B) ਅਤੇ P (A) = 2 $\therefore$ 1_2 ਇਕ 2 × 2 ਦਾ ਯੂਨਿਟ ਮੈਟਰਿਕਸ ਹੈ।

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਕੁਝ ਸੁਆਲ ਦਿਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ :

1. ਮੈਟਰਿਕਸ A ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਮੈਟਰਿਕਸ ਗਿਆਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ
   (Adj A) A = A (Adj A) = $|A|\ 1_3$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. ਮੈਟਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕੱਢੋ।

3. ਮੈਟਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟਰਿਕਸ ਕੱਢੋ।

4. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਦਰਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 8 & -4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

5. ਮੈਟਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

ਨੂੰ $\begin{bmatrix} I & o \\ o & o \end{bmatrix}$ ਵਾਲੀ ਨਾਰਮਲ ਫਾਰਮ 'ਚ ਲਿਆਓ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਦਰਜਾ ਦੱਸੋ।

ਪਾਠ ਨੰ : 2.4 ਲੇਖਕ : ਡਾ. ਰਮੇਸ਼ ਕੁਮਾਰ ਬਾਂਸਲ

ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ
(Solution of Simultaneous Equations)

I. ਭੂਮਿਕਾ

II. ਸਮਕਾਲੀ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ

(ੳ) ਕਰੈਮਰ ਦਾ ਤਰੀਕਾ

(ਅ) ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾ

(ੲ) ਗਾਸ ਲੁਪਤ ਤਰੀਕਾ

III. ਸਾਰਾਂਸ਼

IV. ਪ੍ਰਸ਼ਨ

V. ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. ਭੂਮਿਕਾ :– ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਮੈਟਰਿਕਸ ਅਤੇ ਨਿਰਧਾਰਕ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਤਿੰਨ ਨਾ ਮਾਲੂਮ ਪਦਾਂ ਲਈ ਤਿੰਨ ਸਮਕਾਲੀ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਹਨ :

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$$
$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਅਤੇ ਬਰਾਬਰਤਾ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿਚ ਰਖਦੇ ਹੋਏ ਉਪਰ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$AX = B$$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

x_1, x_2 ਅਤੇ x_3 ਦੇ ਮੁੱਲ, ਜੋ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਆਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

II. ਸਮਕਾਲੀ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ :–

ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਿੰਨ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

(ੳ) ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮ (Crammer Rule)

(ਅ) ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾ (Matrix Inverse Method)

(ੲ) ਗਾਸ ਲੁਪਤ ਤਰੀਕਾ (Gauss Elimination Method)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਤਰੀਕਿਆਂ (ੳ ਅਤੇ ਅ) ਨਾਲ ਸਮਕਾਲੀ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ।

(ੳ) ਕਰੈਮਰ ਦਾ ਨਿਯਮ

ਗੈਬਰਿਲ ਕਰੈਮਰ (Gabriel Crammer), ਸਵਿਸ ਗਣਿਤ-ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਨੇ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਨਿਰਧਾਰਕ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਤਿੰਨ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਅਗਲੇ ਪੰਨੇ ਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ।

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$

$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$AX = B$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$\therefore\ X = A^{-1} B$

ਪਰ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ ਐਡਜਿਆਊਟ A

$X = \frac{1}{|A|}$ (Adj. A) B

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ਜਿਥੇ Aij, ਨਿਰਧਾਰਿਤ $|A|$ ਦੇ ਤੱਤ aij ਦਾ co-factor ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3}{|A|}$$

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ ਜਾਂ } \frac{|A_1|}{|A|}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$x_2 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ ਜਾਂ } \frac{|A_2|}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \text{ ਜਾਂ } \frac{|A_3|}{|A|}$$

ਇਸੇ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਦਾ ਨਿਯਮ ਆਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ $2x_1 + 3x_2 = 13$
$x_1 + 7x_2 = 23$

ਹੱਲ : ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$AX = B$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$

ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

ਹੁਣ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 3 = 11$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 23 & 7 \end{vmatrix} = 91 - 69 = 22$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 1 & 23 \end{vmatrix} = 46 - 13 = 33$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{22}{11} = 2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{33}{11} = 3$$

$\therefore\ x_1 = 2, x_2 = 3$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$

$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$

ਹੱਲ :– ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖੋ

$AX = B$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3 (-1 + 9) - 2 (-1 - 15) - 1 (3 + 5)$

$= 24 + 32 - 8 = 48$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

= 4 (-1 + 9) - 2 (6 - 6) - 1 (-18 + 2)

= 32 - 0 + 16 = 48

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

= 3 (6 - 6) - 4 (-1 - 15) - 1 (-2 - 30)

= 0 + 64 + 32 = 96

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

= 3 (-2 + 18) - 2 (-2 - 30) + 4 (3 + 5)

= 48 + 64 + 32 = 144

ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{48}{48} = 1$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{96}{48} = 2$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{144}{48} = 3$$

(ਅ) ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾ (Matrix Inverse Method)

ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਵਿਚ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ ।

ਮੰਨ ਲਓ ਸਾਡੇ ਪਾਸ ਤਿੰਨ ਲੀਨਿਅਰ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ x_1, x_2 ਅਤੇ x_3 ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2$

$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿਆਨ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

AX = B

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

ਜੇਕਰ $|A| \neq 0$ ਤਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਤਰੀਕੇ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$X = A^{-1} B$

ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਝਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$2x_1 + 3x_2 = 5$

$11x_1 - 5x_2 = 6$

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖੀਏ ਤਾਂ

$AX = B$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 11 & -5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

ਹੁਣ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 11 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 33 = -43$

ਕਿਉਂਕਿ $|A| \neq 0$ ਅਸੀਂ A^{-1} ਦਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 11 & -5 \end{bmatrix}$

a_{11} ਤੱਤ ਦਾ ਕੋਫੈਕਟਰ $= (-1)^{1+1} (-5) = -5$

a_{12} " " " $= (-1)^{1+2}\ 11 = -11$

a_{21} " " " $= (-1)^{2+1}\ 3 = -3$

a_{22} " " " $= (-1)^{2+2}\ 2 = 2$

ਕੋਫੈਕਟਰ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} -5 & -11 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Adjoint ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਕੋਫੈਕਟਰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦਾ ਟਰਾਂਸਪੋਜ ਲਵਾਂਗੇ

$$\text{Adjoint of } A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -11 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-43}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -11 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-43}\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -11 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-43}\begin{bmatrix} -25 & -18 \\ -55 & +12 \end{bmatrix} = \frac{1}{-43}\begin{bmatrix} -43 \\ -43 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ਅਰਥਾਤ $x_1 = 1, x_2 = 1$

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$2x - y + 3z = 9$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

ਹੱਲ :– ਜੇਕਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਲਿਖੀਏ ਤਾਂ

$$AX = B$$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

= 2 (1 + 1) - (-1) (1 - 1) + 3 (-1 -1)

= 4 - 0 - 6 = - 2 $\neq$ 0

$|A| \neq 0$ ਅਸੀਂ A^{-1} ਦਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ਅਰਥਾਤ 2, 0, -2 ਹੋਣ ਤਾਂ

ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ

$$-\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

ਅਰਥਾਤ -2, -1, 1 ਹੋਣਗੇ

ਤੀਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ਅਰਥਾਤ -4, 1, 3 ਹੋਣਗੇ

ਕੋਫੈਕਟਰ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ ਹੋਵੇਗਾ

A ਦਾ Adjoint = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

x = A^{-1} B

ਅਰਥਾਤ X = $\dfrac{\text{Adj } A}{|A|}$ B

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, X = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 18 & -12 & -8 \\ 0 & -6 & +2 \\ -18 & +6 & +6 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ x = 1, y = 2, z = 3

ਸਾਰਾਂਸ਼

ਉਪਰ ਅਸੀਂ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਦੋ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਹ ਦੋ ਤਰੀਕੇ ਕਰੈਮਰ ਦਾ ਨਿਯਮ, ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਉਪਰ ਦਿੱਤੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

IV. ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮ ਜਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰੋ।
   x + y + z = 1
   x + 2y + 3z = 6
   x + 3y + 4z = 6
2. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਕਰੈਮਰ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰੋ।
   x + y - z = 3
   2x + 3y + z = 10
   3x - y - 7z = 1

ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. C.S. Aggarwal and R.C. Joshi — *Mathematics for Students of Economics*
2. Dr. S.C. Aggarwal and Dr. R. K. Rana — *Basic Mathematics for Economists*

ਐਮ. ਏ. (ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ) ਭਾਗ ਪਹਿਲਾ | ਪਰਚਾ ਤੀਜਾ
(ਸਮੈਸਟਰ-ਪਹਿਲਾ) | **(BASIC QUANTITATIVE METHODS)**

ਪਾਠ ਨੰ : 2.5 | ਲੇਖਕ : ਡਾ. ਰਮੇਸ਼ ਕੁਮਾਰ ਬਾਂਸਲ

ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿਚ ਵਰਤੋਂ
(Application of Simultaneous Equations in Economics)

I. ਭੂਮਿਕਾ
II. ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ
III. ਸਾਰਾਂਸ਼
IV. ਪ੍ਰਸ਼ਨ
V. ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੇ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਆਰਥਿਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਨੀਚੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਝ ਆ ਜਾਵੇਗਾ।

2. ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦਾ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ

T[dkj oD 1HL- ਤਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ x, y, z ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਤਿੰਨ ਵਿਭਾਗਾਂ D_1, D_2, D_3, ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜੇ ਮਾਲੂਮ ਹਨ :

ਵਸਤੂ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵਸਤੂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਘੰਟੇ

	ਵਿਭਾਗ D_1	ਵਿਭਾਗ D_2	ਵਿਭਾਗ D_3
x	2	5	1
y	1	2	3
z	2	2	3
ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘੰਟੇ ਉਪਲੱਬਧ	1100	1800	1400

ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਸਤੂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਜੋ ਉਤਪਾਦਨ ਸਮਰੱਥਾ ਦਾ ਪੂਰਾ ਉਪਯੋਗ ਹੋ ਜਾਵੇ।

ਹੱਲ :- ਮੰਨ ਲਓ x_1, x_2, x_3, ਵਸਤੂ x, y, z, ਦੀਆਂ ਉਤਪਾਦਿਤ ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਜੋ ਉਤਪਾਦਿਤ ਸਮਰੱਥਾ ਦਾ ਪੂਰਾ ਉਪਯੋਗ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਉਪਰ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਵਿਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1100$$
$$5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1800$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1400$$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਰਾਹੀਂ :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1100 \\ 1800 \\ 1400 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $Ax = B$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1100 \\ 1800 \\ 1400 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਚ ਅਸੀਂ $x_1, x_2,$ ਅਤੇ x_3 ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰੀਕੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੀਏ ਪਰ x_1, x_2 ਅਤੇ x_3 ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਕੋ ਹੀ ਆਵੇਗਾ। x_1, x_2, x_3 ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

$= 2 (6\text{-}6) -1 (15\text{-}2) + 2 (15\text{-}2)$

$= 0\text{-}13 + 26 = 13$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1100 & 1 & 2 \\ 1800 & 2 & 2 \\ 1400 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 1100 (6\text{-}6) -1 (5400 - 2800)$

$+ 2 (5400 - 2800)$

$= 0 - 2600 + 5200 = 2600$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1100 & 2 \\ 5 & 1800 & 2 \\ 1 & 1400 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 2 (5400 - 2800) - (1100) (15\text{-}2)$

$+ 2 (7000 - 1800)$

$= 5200 - 14300 + 10400 = 1300$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1100 \\ 5 & 2 & 1800 \\ 1 & 3 & 1400 \end{vmatrix}$$

= 2 (2800 - 5400) - 1 (7000 - 1800)
+ 1100 (15-2)
= -5200 - 5200 + 14300
= 3900

ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ :

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2600}{13} = 200$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{1300}{13} = 100$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{3900}{13} = 300$$

$x_1 = 200$, $x_2 = 100$, $x_3 = 300$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ।

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 13 \neq 0$

ਅਸੀਂ A ਦਾ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

ਅਰਥਾਤ 0, -13, 13 ਹਨ।

ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਤੇ ਕੋਫੈਕਟਰ

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

+3, 4, - 5 ਹਨ।

ਤੀਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ

$$+\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix}2 & 2\\5 & 2\end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix}2 & 1\\5 & 2\end{vmatrix}$$

-2, + 6, - 1 ਹਨ।

ਕੋਫੈਕਟਰ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ

$$\begin{bmatrix}0 & -13 & 13\\3 & 4 & -5\\-2 & 6 & -1\end{bmatrix} \text{ ਹੈ}$$

$$\text{A ਦਾ Adjoint} \begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\-13 & 4 & 6\\13 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\-13 & 4 & 6\\13 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

$X = A^{-1} B$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}0 & 3 & -2\\-13 & 4 & 6\\13 & -5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1100\\1800\\1400\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix}0+5400-2800\\-14300+7200+8400\\14300-9000-1400\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix}2600\\1300\\3900\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}200\\100\\300\end{bmatrix}$$

ਅਰਥਾਤ $x_1 = 200, x_2 = 100, x_3 = 300$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਤਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀਆਂ ਸੰਤੁਲਨ ਹਾਲਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

$5\,p_1 - 2\,p_2 = 15$

$-p_1 + 8p_2 = 16$

ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਸੰਤੁਲਿਤ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :–

$5p_1 - 2\,p_2 = 15$

$-p_1 + 8p_2 = 16$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਰਾਹੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $AX = B$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 2 = 38$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 15 & -2 \\ 16 & 8 \end{vmatrix} = 120 + 32 = 152$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 15 \\ -1 & 16 \end{vmatrix} = 80 + 15 = 95$$

ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ

$$p_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{152}{38} = 4$$

$$p_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{95}{38} = 2.50$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 2 = 38$$

$|A| \neq 0$ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ

ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਪਹਿਲੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ

8, 1

ਦੂਜੀ ਪੰਕਤੀ ਦੇ ਕੋਫੈਕਟਰ

2, 5

ਕੋਫੈਕਟਰ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕਸ

$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇਗਾ

$$\text{Adjoint A} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj A}}{|A|} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$X = A^{-1} B$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 120 + 32 \\ 15 + 80 \end{bmatrix} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 152 \\ 95 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{152}{38} \\ \frac{95}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$p_1 = 4, p_2 = 2.50$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਕਿਸੇ ਸਬੰਧਿਤ ਬਾਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿਚ ਸੰਤੁਲਿਨ ਦੀਆਂ ਹਾਲਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ ਹਰੇਕ ਬਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ ਸੰਤੁਲਿਤ ਕੀਮਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$11 p_1 - p_2 - p_3 = 31$

$- p_1 + 6p_2 - 2p_3 = 26$

$- p_1 - 2p_2 + 7p_3 = 24$

ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਹਰੇਕ ਬਾਜ਼ਾਰ ਵਿਚ ਸੰਤੁਲਿਤ ਕੀਮਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :–

$11 P_1 - P_2 - P_3 = 31$

$- P_1 + 6P_2 - 2P_3 = 26$

$- P_1 - 2P_2 + 7P_3 = 24$

ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਰਾਹੀਂ

$$\begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 26 \\ 24 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $AX = B$

ਜਿਥੇ $A = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 31 \\ 26 \\ 24 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ

$$|A| = \begin{vmatrix} 11 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$=11(42-4)+1 (-7 -2)-1 (2+6) = 418-9-8=401$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 31 & -1 & -1 \\ 26 & 6 & -2 \\ 24 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 31 (42 - 4) - (-1) (182 + 48) -1 (- 52 - 144)$

= 1178 + 230 + 196 = 1604

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 11 & 31 & -1 \\ -1 & 26 & -2 \\ -1 & 24 & 7 \end{vmatrix}$$

= 11 (182 + 48) - 31 (- 7 - 2) - 1 (- 24 + 26)
= 2530 + 279 - 2 = 2807

$$|A_3| = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 31 \\ -1 & 6 & 26 \\ -1 & -2 & 24 \end{bmatrix}$$

= 11 (144 + 52) - (-1) (- 24 + 26) + 31 (2 + 6)
= 2156 + 2 + 248 = 2406
ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ

$$p_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1604}{401} = 4$$

$$p_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2807}{401} = 7$$

$$p_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2406}{401} = 6$$

$P_1 = 4, P_2 = 7, P_3 = 6$

III. ਸਾਰਾਂਸ਼

ਉਪਰ ਅਸੀਂ ਅਰਥ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲੁਪਤ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮਕਾਲੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਲੁਪਤ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਦੋ ਤਰੀਕੇ, ਅਰਥਾਤ ਕਰੈਮਰ ਦਾ ਨਿਯਮ, ਅਤੇ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੀਏ, ਸਾਡੇ ਉੱਤਰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੀ ਆਉਣਗੇ।

IV. ਪ੍ਰਸ਼ਨ

1. ਤਿੰਨ ਸਬੰਧਿਤ ਬਾਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿਚ ਸੰਤੁਲਿਨ ਦੀਆਂ ਹਾਲਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ

$3p_1 - p_2 + p_3 = 2$
$-15\, p_1 + 6p_2 - 5p_3 = 5$
$5p_1 - 2p_2 + 2\, p_3 = 1$

ਕਰੈਮਰ ਦੇ ਨਿਯਮ ਜਾਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਉਲਟ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਹਰੇਕ ਬਾਜ਼ਾਰ ਵਿਚ ਸੰਤੁਲਿਨ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਮੈਟਰਿਕਸ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਚੀਜ਼ਾਂ A, B, C ਤੇ ਕਮਿਸ਼ਨ ਦੇ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ

ਮਹੀਨਾ	ਵਿਕਰੀ ਦੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ			ਕੁੱਲ ਕਮਿਸ਼ਨ
	A	B	C	(ਰੁਪਏ)
ਜਨਵਰੀ	90	100	20	800
ਫਰਵਰੀ	130	50	40	900
ਮਾਰਚ	60	100	30	850

ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

1. C.S. Aggarwal and R.C. Joshi : Mathematics for Students of Economics
2. Dr. S.C. Aggarwal and Dr. R.K. Rana : Basic Mathematics for Economists.

ਪਾਠ ਨੰ: 2.6 **ਲੇਖਕ : ਡਾ: ਰਮੇਸ਼ ਕੁਮਾਰ ਬਾਂਸਲ**

ਰੇਖਿਕ ਵਾਧਾ ਅਤੇ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧਾ

(Arithmetic Progression and Geometric Progression)

I. ਜਾਣ-ਪਛਾਣ

II. ਮੰਤਵ

III. ਰੇਖਿਕ ਵਾਧਾ ਸਾਰਣੀ

1. ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ
2. A.P. ਸਾਰਣੀ ਦੀ n ਵੀਂ ਮੱਦ
3. n ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ
4. ਦੋ ਅੰਕ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਰੇਖਿਕ ਔਸਤ
5. ਦੋ ਅੰਕ a ਅਤੇ b ਵਿਚ n ਰੇਖਿਕ ਔਸਤ।

IV. ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ (G.P.)

1. ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ
2. ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦੀ n ਵੀਂ ਮੱਦ
3. ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦੀਆਂ n ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ
4. ਦੋ ਮੱਦਾਂ ਵਿਚ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਔਸਤ
5. ਦੋ ਮੱਦਾਂ ਵਿਚ n ਜਿਆਮਿਤੀ ਔਸਤ।

V. ਸਾਰਾਂਸ਼

VI. ਪ੍ਰਸ਼ਨ

VII. ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

I. ਜਾਣ-ਪਛਾਣ (Introduction)

ਰੇਖਿਕ ਅਤੇ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੜੀ (Sequence) ਅਤੇ ਸਾਰਣੀ (Series) ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਨਿਯਮ ਅਧੀਨ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਕੜੀ (Sequence) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਵਜੋਂ

(i) 2, 5, 8, 11 ---

(ਨਿਯਮ : ਹਰੇਕ ਅਗਲੇ ਅੰਕ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਅੰਕ ਵਿਚ 3 ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ)

(ii) 3, 6, 12, 24 ----

(ਨਿਯਮ : ਹਰੇਕ ਅਗਲੇ ਅੰਕ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਅੰਕ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ)

(iii) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ---------

(ਨਿਯਮ : ਸਾਧਾਰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਲਿਖੇ ਗਏ ਹਨ)

ਜੇਕਰ ਇਸ ਕੜੀ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ (+) ਜਾਂ ਘਟਾਓ (–) ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਿਲਸਲੇ ਵਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਸਾਰਣੀ (Series) ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਉੱਪਰ ਲਿਖੀ ਕੜੀ ਤੋਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਬਣ ਜਾਵੇਗੀ।

$2 + 5 + 8 + 11 + \ldots\ldots\ldots$

$3 + 6 + 12 + 24 + \ldots\ldots$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots$

ਜੇਕਰ ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਦੀਆਂ ਮੱਦਾਂ ਵਿਚ ਲਗਾਤਾਰ ਵਾਧਾ ਜਾਂ ਘਾਟਾ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਵੱਧਦੀ ਸਾਰਣੀ (Progression) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

II. ਮੰਤਵ (Objectives) :– ਇਸ ਪਾਠ ਦੇ ਮੰਤਵ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ।

(i) A.P. ਅਤੇ G.P. ਦੀ ਪ੍ਰੀਭਾਸ਼ਾ

(ii) A.P. ਅਤੇ G.P. ਦੀ ਖਾਸ ਮੱਦ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

(iii) A.P. ਅਤੇ G.P. ਦੀਆਂ ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

(iv) AM ਅਤੇ GM ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

III. ਰੇਖਿਕ ਵਾਧਾ ਸਾਰਣੀ (Arithmetic Progression) :–

1. ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ :– ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਾਰਣੀ ਦੀਆਂ ਮੱਦਾਂ ਵਿਚ ਵਾਧੇ ਜਾਂ ਘਾਟੇ ਦੀ ਦਰ ਸਮਾਨ ਰਹੇ, ਅਰਥਾਤ ਜੇ ਕਰ ਉੱਪਰਥੱਲੀ ਦੋ ਮੱਦਾਂ ਵਿਚ ਅੰਤਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਰੇਖਿਕ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ (A.P.) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਾਰਣੀਆਂ A.P. ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ।

2, 4, 6, 8, 10, ...

3, 6, 9, 12 ....

10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, ...

ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਸਾਧਾਰਨ (ਸੰਯੁਕਤ) ਅੰਤਰ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 'd' ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ । ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ ਨੂੰ 'a' ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। n^{th} ਮੱਦ ਨੂੰ Tn ਅਤੇ n ਮੱਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ Sn ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਖੀਰਲੀ ਮੱਦ ਨੂੰ 'ℓ' ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

A.P. ਸਾਰਣੀ ਦੀ n ਵੀਂ ਮੱਦ :– ਮੰਨ ਲਵੋ 'a' ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ ਅਤੇ ਸਾਧਾਰਨ ਅੰਤਰ 'd' ਹੈ

ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ $T_1 = a = a + (1 - 1) d$

ਦੂਜੀ ਮੱਦ $T_2 = a + d = a + (2 - 1) d$

ਤੀਜੀ ਮੱਦ $T_3 = a + 2d = a + (3 - 1)d$

----

n^{th} ਮੱਦ $Tn = a + (n - 1)d$

ਉਦਾਹਰਣ 1 :– ਸਾਰਣੀ 2, 4, 6, 8, ...ਦੀ nਵੀਂ ਅਤੇ 18ਵੀਂ ਮੱਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a = 2, d = 4-2 = 2$

$Tn = a + (n - 1)d$

$= 2 + (n - 1)2$

$= 2 + 2n - 2 = 2n$

$T_{18} = a + (18 - 1)d$

$= 2 + 17(2) = 36$

ਉਦਾਹਰਣ 2 :– ਸਾਰਣੀ 12, 9, 6, 3....... ਦੀ 10ਵੀਂ ਅਤੇ r ਵੀਂ ਮੱਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a = 12, d = 9 - 12 = -3$

$Tn = a + (n - 1)d$

$T_{10} = a + (10 - 1)d$

$= 12 + 9(-3) = 12 - 27 = -15$

r ਵੀਂ ਮੱਦ, $Tr = a + (r - 1)d$

$Tr = 12 + (r-1)(-3)$

$Tr = 12 - 3r + 3 = 15-3r$

ਉਦਾਹਰਣ 3 :– ਸਾਰਣੀ 2, 5, 8 .... ਦੀ ਕਿਹੜੀ ਮੱਦ 53 ਹੋਵੇਗੀ ?

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a = 2, d = 5 - 2 = 3$

$Tn = 53$

ਪਰ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$Tn = a + (n - 1)d$

ਅਸੀਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ Tn, a ਅਤੇ d ਦਾ ਮੁੱਲ ਭਰ ਦੇਵਾਂਗੇ

$53 = 2 + (n - 1)3$

$53 = 2 + 3n - 3$

$53 + 1 = 3n$ ਜਾਂ $n = \frac{54}{3} = 18$

ਅਰਥਾਤ 18ਵੀਂ ਮੱਦ 53 ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 :– ਜੇ ਕਰ A.P. ਦੀ ਤੀਜੀ ਮੱਦ 18 ਅਤੇ 7ਵੀਂ ਮੱਦ 30 ਹੈ ਤਾਂ 20ਵੀਂ ਮੱਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $T_3 = 18, T_7 = 30, T_{20} = ?$

$T_3 = a + (3-1)d$

$= a + 2d = 18$ (i)

$T_7 = a + 6d = 30$ (ii)

ਦੂਜੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿਚੋਂ ਪਹਿਲੀ ਸਮੀਕਰਨ ਘਟਾ ਕੇ

$$\begin{array}{rcl} a + 6d &=& 30 \\ a + 2d &=& 18 \\ - \; - & & - \\ \hline 4d &=& 12 \end{array} \qquad d = 3$$

d ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਹਿਲੀ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿਚ ਭਰ ਕੇ

$a + 2d = 18$

$a + 2(3) = 18 \quad \therefore a = 18-6 = 12$

$T_{20} = a + (20-1)d$

$= 12 + 19(3) = 12 + 57 = 69$

3. ਰੇਖਿਕ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ (A.P.) ਦੀਆਂ n ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ :– ਜੇ ਕਰ 'a' ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ ਅਤੇ 'd' ਸਾਧਾਰਨ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ, 'ℓ' ਅਖੀਰਲੀ ਮੱਦ, Sn, n ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਤਾਂ

$Sn = a + (a+d) + (a + 2d) + \ldots\ldots\ldots + (\ell-2d) + (\ell-d) + \ell$ .... (i)

ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉਲਟੇ ਪਾਸਿਓਂ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$Sn = \ell + (\ell - d) + (\ell - 2d) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (a + 2d) + (a + d) + a$ ....(ii)

(i) ਅਤੇ (ii) ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ

$2Sn = (a + \ell) + (a + \ell) + \ldots\ldots\ldots\ldots$ n ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ

$2Sn = n(a + \ell)$

$Sn = \frac{n}{2}(a + \ell)$

ਪਰ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\ell = Tn = a + (n - 1)d$

$Sn = \frac{n}{2}(a + a + (n - 1)d)$

$= \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

ਉਦਾਹਰਣ 5 :– ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਾਰਣੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ।

(i) $.70 + .71 + .72 + .73 + \ldots\ldots\ldots\ldots 100$ ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ

(ii) $3 + 3\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots n$ ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ

ਹੱਲ :– (i) $.70 + .71 + .72 + .73 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

ਇਥੇ $a = .70$ $d = 0.71 - 0.70$

$= .01 = \frac{1}{100}$

ਅਤੇ $n = 100$

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

$S_{100} = \frac{100}{2}\left(2 \times .70 + (100-1)\left(\frac{1}{100}\right)\right)$

$= 50\left[2 \times \frac{70}{100} + 99\left(\frac{1}{100}\right)\right]$

$= 50\left[\frac{140}{100} + \frac{99}{100}\right]$

$= 50\left[\frac{239}{100}\right] = \frac{1195}{10}$

$S_{100} = 119.5$

(ii) $3 + 3\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots$

ਇਥੇ $a = 3,\ d = 3\frac{1}{3} - 3 = \frac{1}{3}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2 \times 3 + (n-1)\frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[6 + \frac{n-1}{3}\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(\frac{18 + n - 1}{3}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{17 + n}{3}\right) = \frac{n\,(n+17)}{6}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 :– ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ

$51 + 50 + 49 + \ +.............+1$

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a = 51,\ d = 50 - 51 = -1$

$\ell = 1$

ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ

$T_n = a + (n-1)d$

$1 = 51 + (n-1)(-1)$

$1 = 51 - n + 1$

$n = 51$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + \ell\right]$$

$$S_n = \frac{51}{2}\left[51 + 1\right]$$

$$= \frac{51}{2}\left[52\right] = 51 \times 26 = 1326$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 :– ਸਾਰਣੀ 9 + 12 + 15+ .... ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 306 ਹੋਵੇਗਾ ?

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a = 9,\ d = 12 - 9 = 3$

$S_n = 306$, ਅਸੀਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$306=\frac{n}{2}\left[2\times 9+(n-1)3\right]$$

612 = n (18 + 3n-3)

612 = 18n + 3n^2 - 3n

3n^2 + 15n - 612 = 0

ਜਾਂ n^2 + 5n - 204 = 0

$$n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ਇਥੇ a = 1, b = 5, c = -204

$$n=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\times 1(-204)}}{2\times 1}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{25+816}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{841}}{2}$$

$$=n=\frac{-5\pm 29}{2}$$

$$n=\frac{-5-29}{2}=-17 \text{ ਜਾਂ } \frac{-5+29}{2}=12$$

ਪਰ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਗਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਇਸ ਲਈ n = 12 ਹੈ ।

ਦੋ ਅੰਕ a ਅਤੇ b ਵਿਚ ਰੇਖਿਕ ਔਸਤ (Arithmetic mean between two quantities a and b) :- ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਅੰਕ A.P. ਵਿਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਵਾਲੀ ਮੱਦ ਨੂੰ ਦੂਜੀਆਂ ਦੋ ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਰੇਖਿਕ ਔਸਤ (A.M.) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਵੋ x, a ਅਤੇ b ਦਾ A.M. ਹੈ, ਤਾਂ a, x, b, A.P ਵਿਚ ਹੋਣਗੇ

x - a = b - x

2x = a + b

$$x=\frac{a+b}{2}$$

5. ਦੋ ਅੰਕ a ਅਤੇ b ਵਿਚ n ਰੇਖਿਕ ਔਸਤ (n A.M.'s between two quantities a and b)

ਮੰਨ ਲਵੋ $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$, a ਅਤੇ b ਵਿਚ n ਰੇਖਿਕ ਔਸਤ ਹਨ।

ਤਾਂ $a, A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots\ldots A_n, b$, A.P. ਵਿਚ ਹੋਣਗੇ।

ਕੁੱਲ ਮੱਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = n + 2

ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ = a

T_{n+2} = b, ਅਸੀਂ d ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

T_{n+2} = a + (n + 2-1)

$b = a + (n+1)d$

$d = \frac{b-a}{n+1}$

$A_1 = T_2 = a + d = a + \frac{b - a}{n + 1}$

$A_2 = T_3 = a + 2d = a + \frac{2[b-a]}{n+1}$

$A_3 = T_4 = A + 3d = a + \frac{3[b-a]}{n+1}$

$A_n = T_{n+1} = A + nd = a + \frac{n[b-a]}{n+1}$

ਉਦਾਹਰਣ 8 **:–** –18 ਅਤੇ 4 ਵਿਚ ਤਿੰਨ A.M's ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਮੰਨ ਲਵੋ A_1, A_2 ਅਤੇ A_3 , -18 ਅਤੇ 4 ਵਿਚ ਤਿੰਨ A.M's s ਹਨ।

-18, A_1, A_2, A_3, 4, A.P ਵਿਚ ਹਨ

$a = -18, T_5 = 4$

$T_5 = a + 4d = 4$

$-18 + 4d = 4$ ਜਾਂ $4d = 22$, $d = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$

$A_1 = T_2 = a + d = -18 + \frac{11}{2} = \frac{-25}{2}$

$A_2 = T_3 = a + 2d = -18 + 2\left(\frac{11}{2}\right) = -18+11=-7$

$A_3 = T_4 = a + 3d = -18 + 3\left(\frac{11}{2}\right) = -18+\frac{33}{2}=\frac{-36+33}{2}=\frac{-3}{2}=-1.5$

IV. **ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ (Geometric Progression) (G.P.)**

1. ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ :– ਇਕ ਸਾਰਣੀ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੱਦ ਦਾ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ ਨਾਲ ਅਨੁਪਾਤ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਅਖੀਰ ਤੱਕ ਸਥਿਰ ਰਹੇ। ਇਸ ਸਥਿਰ ਤੱਤ ਨੂੰ ਸਾਧਾਰਨ ਅਨੁਪਾਤ (Common ratio) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 'r' ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਾਰਣੀਆਂ G.P. ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ :

1, 2, 4, 8..........

4, 12, 36, 108........

$\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}$........

a, ar, ar^2, ar^3 --------------

2. ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦੀ n ਵੀਂ ਮੱਦ (nth term of a G.P.) :– ਮੰਨ ਲਵੋ 'a' ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ ਅਤੇ 'r' ਸਾਧਾਰਨ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ, n ਵੀਂ ਮੱਦ ਨੂੰ T_n ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

$T_1 = a = a\, r^{1-1}$

$T_2 = a\, r = a\, r^{2-1}$

$T_3 = a\, r^2 = a\, r^{3-1}$

....

....

$T_n = a\, r^{n-1}$

ਉਦਾਹਰਣ 9 :– ਸਾਰਣੀ $\frac{1}{2}+1+2$......... ਦੀ 8ਵੀਂ ਮੱਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a=\frac{1}{2},\ r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{½}=2$

8ਵੀਂ ਮੱਦ $= T_8 = a\, r^{8-1} = a\, r^7$

$= \frac{1}{2}(2)^7 = 2^6 = 64$

ਉਦਾਹਰਣ 10 :– ਕਿਸੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਚੌਥੀ ਮੱਦ 24 ਅਤੇ ਸੱਤਵੀ ਮੱਦ 192 ਹੈ ਤਾਂ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਸਾਰਣੀ ਅਤੇ 14ਵੀਂ ਮੱਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

$T_4 = 24 \quad T_7 = 192$

ਮੰਨ ਲਵੋ ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ 'a' ਅਤੇ ਸਾਧਾਰਨ ਅਨੁਪਾਤ 'r' ਹੈ।

$T_4 = a\, r^3 = 24 \quad$ (i)

$T_7 = a\, r^6 = 192 \quad$ (ii)

ਸਮੀਕਰਨ (ii) ਨੂੰ (i) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{a\,r^6}{a\,r^3} = \frac{192}{24}$$

$r^3 = 8 = (2)^3 \qquad \therefore r = 2$

r ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਮੀਕਰਨ (i) ਵਿਚ ਭਰ ਕੇ

$a\,(2)^3 = 24, \quad 8a = 24$

$a = 3$

G.P. ਸਾਰਣੀ

3, 6, 12, 24, …………

14ਵੀਂ ਮੱਦ $= T_{14} = a\, r^{13}$

$= 3\,(2)^{13} = 24576$

ਉਦਾਹਰਣ 11 :– ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਚੌਥੀ, ਸੱਤਵੀਂ ਅਤੇ ਦਸਵੀਂ ਮੱਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b, c ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$b^2 = ac$

ਹੱਲ :– ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ G.P. ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ A ਅਤੇ ਸਾਧਾਰਨ ਅਨੁਪਾਤ 'r' ਹੈ

$T_4 = A\,r^3 = a$ (i)

$T_7 = A\,r^6 = b$ (ii)

$T_{10} = A\,r^9 = c$ (iii)

ਸਮੀਕਰਨ (ii) ਨੂੰ (i) ਅਤੇ (iii) ਨੂੰ (ii) ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਤੇ

$$\frac{A\,r^6}{A\,r^3} = \frac{b}{a} \quad \therefore r^3 = \frac{b}{a} \quad \text{(iv)}$$

$$\frac{A\,r^9}{A\,r^6} = \frac{c}{b} \quad \therefore r^3 = \frac{c}{b} \quad \text{(v)}$$

(iv) ਅਤੇ (v) ਤੋਂ

$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ ਜਾਂ $b^2 = ca$

3. ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦੀਆਂ n ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Sum of n terms of a G.P.) :–

ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ 'a' ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਧਾਰਨ ਅਨੁਪਾਤ 'r' ਹੈ ਤਾਂ G.P. ਸਾਰਣੀ $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots\ldots\ldots ar^{n-1}$ ਹੋਵੇਗੀ। ਜੇ n ਮੱਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ S_n ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ

$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-1}$

ਦੋਨੋ ਪਾਸੇ r ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਤੇ (i)

$r\,Sn = a\,r + a\,r^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a\,r^n$ (ii)

ਸਮੀਕਰਨ (ii) ਵਿਚੋਂ (i) ਘਟਾਉਣ ਤੇ

$(1\text{-}r)\,S_n = a - ar^n = a\,(1\text{-}r^n)$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ਜੇ $r < 1$

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ ਜੇ $r > 1$

ਜੇਕਰ $r > 1$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ n ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਫਾਰਮੂਲੇ

$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $r < 1$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਫਾਰਮੂਲਾ $S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 :– ਸਾਰਣੀ

$\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}$ —————— ਦਾ 12 ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a = \sqrt{2}$, $r = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\therefore r > 1$

r ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਕ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਫਾਰਮੂਲੇ

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ

n = 12

$$S_{12} = \sqrt{2}\,\frac{\left(\left(\sqrt{2}\right)^{12} - 1\right)}{\sqrt{2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(64-1)}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\;\;63}{2-1}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

$$S_{12} = 63\left(2+\sqrt{2}\right)$$

ਉਦਾਹਰਣ 13 :–

ਸਾਰਣੀ $\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3}$ ਦੀਆਂ ਕਿਨ੍ਹਾਂ ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $39 + 13\sqrt{3}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a = \sqrt{3}$, $r = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\therefore r > 1$

ਇਸ ਲਈ $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$

ਸਾਨੂੰ S_n ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਅਸੀਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

$$39 + 13\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^n - 1\right)}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\left(39 + 13\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^n - 1\right)$$

$$39\sqrt{3} - 39 + 39 - 13\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^n - 1\right)$$

$$26\sqrt{3} = \sqrt{3}\left(\left(\sqrt{3}\right)^n - 1\right)$$

$26 + 1 = (\sqrt{3})^n$

$27 = (\sqrt{3})^n$ ਜਾਂ $(\sqrt{3})^6 = (\sqrt{3})^n$

ਇਸ ਲਈ $n = 6$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ n ਮੱਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।
ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ

7 + 77 + 777 + ...

ਹੱਲ :- $S_n = 7 + 77 + 777 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$S_n = 7(1+11 + 11$ + ... n ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ) ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ

$$= \frac{7}{9}\left[(9 + 99 + 999 \ldots\ldots\ldots \text{ ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ ਦਾਂ ਤੱਕ})\right]$$

$$= \frac{7}{9}\left[(10-1) + 10^2 - 1) + (10^3 - 1) - - - n \text{ ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ})\right]$$

$$= \frac{7}{9}\left[(10 + 10^2 + 10^3 - - - - - n \text{ ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ}) - n\right]$$

$$S_n = \frac{7}{9}\left[\frac{10\,(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$$

$$S_n = \frac{7}{9}\left[\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n\right]$$

$$S_n \ \frac{7}{81}\left[10^{n+1} - 10 - 9n\right]$$

4. ਦੋ ਮੱਦਾਂ ਵਿਚ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਔਸਤ (Geometric Mean between two quantities) :-

ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਮੱਦਾਂ G.P. ਵਿਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਵਾਲੀ ਮੱਦ ਨੂੰ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਔਸਤ (G.M) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਕਰ G, a ਅਤੇ b ਵਿਚ G.M. ਹੋਵੇ ਤਾਂ a, G, b, G.P. ਵਿਚ ਹੋਣਗੇ

$$\therefore \frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$

$G^2 = ab$

$G = \sqrt{ab}$

5. ਦੋ ਮੱਦਾਂ **a** ਅਤੇ **b** ਵਿਚ **n** ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਔਸਤ **(n G.M.' s between two numbers a and b) :-**

ਮੰਨ ਲਵੋ $G_1, G_2, G_3 \ldots\ldots\ldots\ldots G_n$, a ਅਤੇ b ਵਿਚ n G.M. ਹਨ

ਤਦ $a, G_1, G_2, G_3 \ldots\ldots\ldots\ldots G_n, b$, G.P. ਵਿਚ ਹੋਣਗੇ।

ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ $T_1 = a$

$T_{n+2} = b$, G.M.'s ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ r ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

$T_{n+2} = a\,(r)^{n+2-1} = b$

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \quad \text{ਜਾਂ} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n+1}$$

\- - - - - - - -

\- - - - - - - -

$$G_1 = T_2 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n+1}$$

$$G_2 = T_3 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{2/n+1}$$

$$G_3 = T_4 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{3/n+1}$$

$$G_n = T_{n+1} = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{n/n+1}$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 :– 2 ਅਤੇ 32 ਵਿਚ ਤਿੰਨ G.M.'s ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਮੰਨ ਲਵੋ G_1, G_2 ਅਤੇ G_3 2 ਅਤੇ 32 ਵਿਚ ਤਿੰਨ G.M.'s ਹਨ

ਤੱਦ 2, G_1, G_2, G_3, 32, G.P. ਵਿਚ ਹੋਣਗੇ।

$a = 2, T_5 = 32$

$T_5 = a\, r^4 = 32$

$2\, r^4 = 32$ ਜਾਂ $r^4 = 16 = (2)^4$

$r = 2$

$G_1 = T_2 = a\, r = 2\times 2 = 4$

$G_2 = T_3 = a\, r^2 = 2(2)^2 = 8$

$G_3 = T_4 = a\, r^3 = 2(2)^3 = 16$

V. ਸਾਰਾਂਸ਼ :– ਇਸ ਪਾਠ ਵਿਚ ਰੇਖਿਕ ਅਤੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰਣੀਆਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੱਦ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਵੀ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, A.P. ਅਤੇ G.P. ਸਾਰਣੀਆਂ ਦੇ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਫਾਰਮੂਲੇ ਵੀ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ A.M. ਅਤੇ G.M. ਕੱਢਣ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਵੀ ਦੱਸੇ ਗਏ ਹਨ।

VI ਪ੍ਰਸ਼ਨ :–

1. ਛੋਟੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਰੇਖਿਕ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ (A.P.) ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੱਸੋ।

(ii) ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ (G.P.) ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੱਸੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੱਦਾਂ ਵਿਚ GM 10 ਹੈ ਅਤੇ A.M. 34 ਹੈ ਤਾਂ ਮੱਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਲੰਮੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ

(i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੀ mਵੀਂ ਮੱਦ n ਹੈ ਅਤੇ nਵੀ ਮੱਦ m ਹੈ ਤਾਂ (m+n) ਵੀਂ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1+3-5+7+9-11+13+15-17+...................

(ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ G.P. ਸਾਰਣੀ ਦੀ ਪੰਜਵੀ ਮੱਦ 8 ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਮੱਦ 24 ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਰਣੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ n ਮੱਦਾਂ ਤੱਕ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$1 + (1 + a)\, r + (1 + a + a^2)\, r^2 +$ -----------**ਐਮ. ਏ. (ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ) ਭਾਗ**

(iv) ਜੇ ਕਰ ਦੋ ਮੱਦਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ A.M. ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ GM ਦਾ n ਗੁਣਾਂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਨੁਪਾਤ a/b ਪਤਾ ਕਰੋ।

VII . ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ

(Suggested Readings)

1. Bhardwaj and Sabharwal : Mathematics for students of Economics
2. Aggarwal and Joshi : Mathematics for students of Economics

ਰੇਖਿਕ ਅਤੇ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ

(Application of Arithmetic and Geometric Progression in Economic Analysis)

I. ਭੂਮਿਕਾ (Introduction) :– ਰੇਖਿਕ ਅਤੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਵਿਸਲੇਸ਼ਣ ਵਿਚ ਆਮ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਰਥਿਕ ਵੇਰੀਏਬਲ ਵਿਚ ਸਮੇਂ ਮੁਤਾਬਿਕ ਪ੍ਰੀਵਰਤਨ ਰੇਖਿਕ ਜਾਂ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿਸੇ ਸੰਪਤੀ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਥਿਰ ਦਰ ਨਾਲ ਘੱਟਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਕੰਪਨੀ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿਚ ਵਾਧਾ ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ਸਥਿਰ ਦਰ ਨਾਲ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿਚ ਰੇਖਿਕ ਵਾਧਾ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ ਪਰ ਅਬਾਦੀ ਅਤੇ ਕੀਮਤਾਂ ਵਿਚ ਵਾਧਾ ਜਿਆਮਿਤੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਦਾ ਗੁਣਨ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਚ ਖਾਸ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਗੁਣਨ ਨੂੰ ਸਮਝਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ।

II. ਮੰਤਵ (Objectives) :– ਪਿਛਲੇ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਰੇਖਿਕ ਅਤੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀਆਂ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਬਾਰੇ ਦੱਸਾਂਗੇ, ਜੋ ਕਿ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਕੇ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ।

(i) A.P. ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ
(ii) G.P. ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ
(iii) ਰੇਖਿਕ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ (Application of Arithmetic Progression) :–

ਉਦਾਹਰਣ 1:– ਕੋਈ ਕੰਪਨੀ ਆਪਣੇ ਸੰਸਥਾਪਨ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ 25 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿਚ 12 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਵਾਧਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕੰਪਨੀ ਦੇ ਸੰਸਥਾਪਨ ਤੋਂ 12 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਦੇ ਸਾਲ ਵਿਚ ਕਿਤਨੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਤਦ ਕੁੱਲ ਕਿਤਨਾ ਉਤਪਾਦਨ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a = 25$, $d = 12$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ

ਤੱਦ ਸਾਰਣੀ 25, 37, 49 ....ਹੋਵੇਗੀ

ਅਸੀਂ ਬਾਰ੍ਹਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿਚ ਉਤਪਾਦਨ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ T_{12}

$T_n = a + (n-1)d$

$T_{12} = a + (12-1)d$

$T_{12} = 25 + 11 (12) = 25 + 132 = 157$

12 ਸਾਲਾਂ ਵਿਚ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ $= S_{12}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}\left[2\times 25 + (12-1)12\right]$$

$= 6(50 + 132) = 6 \times 182 = 1092$

ਉਦਾਹਰਣ 2 :– ਕਿਸੇ ਕੰਪਨੀ ਨੇ 1400 ਰੁਪਏ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਮਸ਼ੀਨ ਲਗਾਈ ਹੈ। 9 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅਖੀਰ ਵਿਚ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 200 ਰੁਪਏ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਕਰ ਘਿਸਾਵਟ ਦੀ ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਸਥਿਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਲਾਨਾ ਘਿਸਾਵਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਮੰਨ ਲਓ ਸਲਾਨਾ ਘਿਸਾਵਟ ਦੀ ਦਰ d ਹੈ।

ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਮੁੱਲ = 1400 ਰੁਪੈ

ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿਚ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਮੁੱਲ = 1400 – d

$\therefore$ a = 1400 – d

9 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿਚ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਮੁੱਲ = 200

$T_9 = 200$ ਅਤੇ $d = (-d)$

$T_n = a + (n-1)d$

$T_9 = a + (9-1)d$

$200 = (1400 - d) + 8(-d)$

$= 1400 - d - 8d$

$9d = 1200$

$$d = \frac{1200}{9} = \frac{400}{3}$$

= 133.33 ਰੁਪੈ

ਉਦਾਹਰਣ 3 :– ਕਿਸੇ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿਚ ਲਗਾਈ ਗਈ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 6,00,000 ਰੁਪੈ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿਚ ਘਿਸਾਵਟ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ 15 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ, ਦੂਜੇ ਸਾਲ 13½ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਸਾਲ 12 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਗਲੇ ਸਾਲਾਂ ਵਿਚ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਘਟਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। 10 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿਚ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਕੀ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇ ਕਰ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਮਸ਼ੀਨ ਦੇ ਅਸਲੀ ਮੁੱਲ ਤੇ ਲਾਗੂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ।

ਹੱਲ :– ਮੰਨ ਲਵੋ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 100 ਰੁਪੈ ਹੈ, ਘਿਸਾਵਟ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਦਰ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਸਾਲ 15, 13½, 12.........ਹੋਵੇਗੀ। ਜੋ ਕਿ A.P. ਵਿਚ ਹੈ, ਜਿਥੇ

$$a = 15,\ d = 13½ - 15 = -\frac{3}{2}$$

10 ਸਾਲਾਂ ਵਿਚ ਕੁੱਲ ਘਿਸਾਵਟ = S_{10}

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2a + (10-1)d\right]$$

$$= 5\left[2\times 15 + 9\left(\frac{-3}{2}\right)\right] = 5\left[30 - \frac{27}{2}\right]$$

$$= 5\left[\frac{33}{2}\right] = \frac{165}{2}$$

10 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਮੁੱਲ $= 100 - \frac{165}{2} = \frac{35}{2}$ ਪਰ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 6,00,000 ਰੁਪਏ ਹੈ

ਇਸ ਦਾ 10 ਸਾਲਾਂ ਬਾਦ ਮੁੱਲ $= \frac{600000}{100} \times \frac{35}{2} = 1{,}05{,}000$ ਰੁਪਏ ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 :– ਇਕ ਫਰਮ ਆਪਣੇ ਸੰਸਥਾਪਨ ਦੇ ਚੌਥੇ ਸਾਲ 225 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਅਤੇ ਸੱਤਵੇਂ ਸਾਲ 330 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਕਰ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿਚ ਵਾਧੇ ਦੀ ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਸਥਿਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਫਰਮ ਦਾ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਅਤੇ ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

$T_4 = 225$ $T_7 = 330$

$T_4 = a + 3d = 225$ (i)

$T_7 = a + 6d = 330$ (ii)

ਸਮੀਕਰਨ (i) ਨੂੰ (ii) ਵਿਚੋਂ ਘਟਾ ਕੇ

$a + 6d = 330$

$a + 3d = 225$

$- \quad - \quad -$

$3d = 105 \qquad d = \frac{105}{3} = 35$

d ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਮੀਕਰਨ (i) ਵਿਚ ਭਰ ਕੇ

$a + 3(35) = 225$

$a + 105 = 225$

$a = 225 - 105 = 120$

$T_5 = a + 4d$

$= 120 + 4(35) = 120 + 140 = 260$

ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਨ 120 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਨ 260 ਇਕਾਈਆਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 :– ਮੰਨ ਲਵੋ ਤੁਸੀ ਅੱਜ ਇਕ ਰੁਪਏ ਦੀ ਬੱਚਤ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਅਗਲੇ ਦਿਨ 2 ਰੁਪਏ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਦਿਨ ਤਿੰਨ ਰੁਪਏ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਬੱਚਤ ਕਰਦੇ ਹੋ, ਤੁਹਾਡੀ 365 ਦਿਨਾਂ ਵਿਚ ਕਿੰਨੀ ਬੱਚਤ ਹੋਵੇਗੀ ?

ਹੱਲ :– ਇਥੇ $a = 1, d = 2-1=1$

ਅਸੀ 365 ਦਿਨਾਂ ਵਿਚ ਬੱਚਤ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ S_{365} ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + \ell\right]$$

$$S_{365} = \frac{365}{2}\left[1 + 365\right] = 365\left[\frac{366}{2}\right]$$

$= 365 \times 183 = 66795$

IV. ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ (Application of Arithmetic Progression)

ਉਦਾਹਰਣ 6 :– ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਕਾਰ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿਚ 25 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਸਲਾਨਾ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਘਿਸਾਵਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕਾਰ ਦਾ 8 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਕੀ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ, ਜੇ ਕਾਰ ਦਾ ਮੁੱਲ 2048 ਰੁਪਏ ਹੈ ?

ਹੱਲ :– ਕਾਰ ਦਾ ਹੁਣ ਮੁੱਲ = 2048 ਰੁਪਏ

ਘਿਸਾਵਟ = 25 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਸਲਾਨਾ

ਜੇਕਰ ਕਾਰ ਦਾ ਹੁਣ ਮੁੱਲ 100 ਰੁਪਏ ਹੈ ਤਾਂ ਇਕ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਮੁੱਲ = 75 ਰੁਪਏ

” ” ” ” ” ” 1 ” ” ” ” ” ” $= \frac{75}{100}$

” ” ” ” ” ” 2048 ” ” ” ” ” ” $= \frac{75}{100} \times 2048$

$= 1536$ ਰੁਪਏ

ਇਸ ਲਈ $a = 1536$

ਅਤੇ ਕਾਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਦੂਜੇ, ਤੀਜੇ, ਚੌਥੇ, ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਲਈ ਜ਼ਿਆਮਿਤੀ ਸਾਰਣੀ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿਸ ਵਿਚ

$r = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

8 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕਾਰ ਦਾ ਮੁੱਲ $= a\, r^{8-1}$

$= a\, r^7$

$= 1536 \left(\frac{3}{4}\right)^7$

$= \frac{6561}{32}$ ਜਾਂ 205.03 ਰੁਪਏ

ਉਦਾਹਰਣ 7 :– ਜੇਕਰ ਸੀਮਾਂਤ ਉਪਭੋਗ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ $\frac{2}{3}$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਅਤੇ ਮੁੱਢਲੀ ਸੁਤੰਤਰ ਨਿਵੇਸ਼ 10 ਲੱਖ ਰੁਪਏ ਲਈ ਆਮਦਨ ਵਿਚ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿੰਨਾਂ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ ? ਗੁਣਨ ਦਾ ਕੀ ਆਕਾਰ ਹੋਵੇਗਾ?

ਹੱਲ :– ਨਿਵੇਸ਼ ਕੀਤੀ ਰਕਮ = 10 ਲੱਖ ਰੁਪਏ

ਪਹਿਲੇ ਚੱਕਰ ਵਿਚ ਆਮਦਨ ਵਿਚ ਵਾਧਾ = 10 ਲੱਖ ਰੁਪਏ

ਸੀਮਾਂਤ ਉਪਭੋਗ ਪ੍ਰਵਿਰਤੀ = $\frac{2}{3}$, ਪਹਿਲੇ ਚੱਕਰ ਵਿਚ ਉਪਭੋਗ = ਰੁਪਏ 10 ਲੱਖ × $\frac{2}{3}$ ਕਿਉਂਕਿ ਇਕ ਆਦਮੀ ਦਾ ਖਰਚਾ ਦੂਜੇ ਆਦਮੀ ਦੀ ਆਮਦਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਜੇ ਚੱਕਰ ਵਿਚ ਆਮਦਨ ਵਿਚ ਵਾਧਾ $= 10 \times \frac{2}{3}$, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੀਜੇ ਚੱਕਰ ਵਿਚ ਆਮਦਨ ਵਿਚ ਵਾਧਾ $= 10 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਮਦਨ ਵਿਚ ਕੁੱਲ ਵਾਧਾ

$= \left[10 + \left(10 \times \frac{2}{3}\right) + 10 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \ldots\ldots\right]$ ਲੱਖ ਰੁਪਏ

$$= 10\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\right] \text{ ਲੱਖ ਰੁਪਏ}$$

ਕਿਉਂਕਿ $S_n = \frac{a}{1-r}$

ਇਥੇ $a = 1, r = \frac{2}{3}$

$$= 10\left[\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right] = 30 \text{ ਲੱਖ ਰੁਪਏ}$$

S_∞ ਗੁਣਨ ਦਾ ਆਕਾਰ = 3

ਉਦਾਹਰਣ 8 :– ਜੇਕਰ ਏ ਨੇ ਬੀ ਤੋਂ 5115 ਰੁਪਏ ਉਧਾਰ ਲਏ ਹਨ, ਜੋ ਉਸ ਨੇ 10 ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਕਿਸ਼ਤਾਂ ਵਿਚ ਵਾਪਸ ਕਰਨੇ ਹਨ। ਜੇ ਕਰ ਹਰੇਕ ਕਿਸ਼ਤ ਪਹਿਲੀ ਕਿਸ਼ਤ ਤੋਂ ਦੋਗੁਣਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੀ ਕਿਸ਼ਤ ਅਤੇ ਅਖੀਰਲੀ ਕਿਸ਼ਤ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਇਥੇ ਸਾਨੂੰ $S_{10} = 5115$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ $r = 2$ ਹੈ, ਅਸੀਂ a ਅਤੇ T_{10} ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

$r = 2 \therefore r > 1$

ਇਸ ਲਈ $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$$5115 = \frac{a(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$5115 = a\,(1024\text{-}1)$

$$a = \frac{5115}{1023} = 5$$

$T_{10} = a\, r^{10-1} = 5\,(2)^9$

$= 5 \times 512 = 2560$

ਜਿਆਮਿਤੀ ਸਾਰਣੀ ਅਤੇ ਵਸੋਂ ਵਿਚ ਵਾਧਾ (Geometric Series and Population Growth)

ਹੱਲ:– ਮੰਨ ਲਵੋ P_i $(i = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n)$ i ਵੀਂ ਸਾਲ ਦੀ ਵਸੋਂ ਹੈ ਅਤੇ r ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ਵਸੋਂ ਵਿਚ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਹੈ

t_0 ਸਾਲ ਵਿਚ ਵਸੋਂ $= P_0$

t_1 ਸਾਲ ਵਿਚ ਵਸੋਂ $= P_0 + r\,P_0 = P_0(1+r) = P_1$

t_2 ਸਾਲ ਵਿਚ ਵਸੋਂ $= P_2 = P_1 + rP_1 = P_1\,(1 + r)$

$= P_0\,(1+r)\,(1+r) = P_0\,(1 + r)^2$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $P_3 = P_2 + r\,P_2 = P_2\,(1 + r)$

$= P_0(1 + r)^2\,(1 + r) = P_0(1 + r)^3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਲ t_0, t_1, t_2, t_3 -----------

ਵਿਚ ਵਸੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ P_0, P_1, P_2, P_3 ----------

ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਾਧੇ ਵਾਲੀ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਮੱਦ P_0 ਅਤੇ ਸਾਧਾਰਨ ਅਨੁਪਾਤ (r) = 1 + r ਹੈ।

n ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿਚ ਵਸੋਂ $P_n = P_0(1+r)^n$

ਉਦਾਹਰਣ 9 :– ਭਾਰਤ ਦੀ ਵਸੋਂ 1971 ਵਿਚ 54 ਕਰੋੜ ਸੀ, 1981 ਵਿਚ ਵਸੋਂ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਓ, ਜਦ ਕਿ ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ 3 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਹੈ

ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ log 54 = 1.7324

log 103 = 2.0128, log 7251 = 3.8604)

ਹੱਲ :– 1971 ਵਿਚ ਵਸੋਂ = 54 ਕਰੋੜ

ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ = 3%

ਜੇਕਰ t_0 ਸਾਲ ਵਿਚ ਵਸੋਂ P_0 ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਸਾਲ ਦਰ r ਹੈ ਤਦ P_n, n ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿਚ ਵਸੋਂ

$P_n = P_0(1+r)^n$

1981 ਵਿਚ ਵਸੋਂ x ਮੰਨ ਲਵੋ ਤਾਂ ਅਸੀਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਥੇ

$P_0 = 54,\ r = 3\% = \frac{3}{100},\ n = 10$

$x = 54\ (1 + .03)^{10} = 54\ (1.03)^{10}$

ਦੋਨੇ ਪਾਸੇ log ਲੈ ਕੇ

$(\log x = \log 54 + \log (1.03)^{10}$

$= \log 54 + 10 \log (1.03)$

$= 1.7324 + 10\ (0.01280)$

$= 1.7324 + 0.1280 = 1.8604$

x = Antilog (1.8604)

= 72.51

1981 ਵਿਚ ਵਸੋਂ 72.51 ਕਰੋੜ ਹੋਵੇਗੀ।

[Given log 7251 = 3.8604]

$\therefore$ Anti log (1.8604) = 72.51

ਉਦਾਹਰਣ 10 :– ਕੋਈ ਰਾਸ਼ੀ 10 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ਸੰਯੁਕਤ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ 5 ਸਾਲਾਂ ਵਿਚ 8650 ਰੁਪਏ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਮੁੱਢਲੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :– ਮੰਨ ਲਵੋ ਮੂਲ ਰਾਸ਼ੀ p ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ p ਰਾਸ਼ੀ 5 ਸਾਲ ਬਾਅਦ $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

$= P\left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = P\ (1\,.\,1)^5$ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ

$8650 = P(1.1)^5$

ਦੋਨੋ ਪਾਸੇ log ਲੈ ਕੇ

log 865 = log P + 5 log (1.1)

3.9370 = log P + 5 (0.0414)

log P = 3.9370 - .2070 = 3.7300

P = Anti log (3.7300)

P = 5370

ਅਰਥਾਤ ਮੂਲ 5370 ਹੋਵੇਗਾ।

V. **ਸਾਰਾਂਸ** :– ਇਸ ਪਾਠ ਵਿਚ ਅਸੀਂ A.P. ਅਤੇ G.P. ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਆਰਥਿਕ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਹੈ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਮਝਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

VI. **ਪ੍ਰਸ਼ਨ**

1. ਕੋਈ ਆਦਮੀ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਨਾਲੋਂ ਹਰੇਕ ਸਾਲ 50 ਰੁਪਏ ਦੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਬੱਚਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਵਿਆਜ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ 10 ਸਾਲਾਂ ਵਿਚ ਉਸ ਦੀ ਕੁੱਲ ਬੱਚਤ 3000 ਰੁਪਏ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸ ਨੇ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਅਤੇ ਅਖੀਰਲੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਬੱਚਤ ਕੀਤੀ?
2. ਇੱਕ ਕੀਮਤ ਸੂਚਕ ਅੰਕ 1970 ਵਿਚ 91 ਅਤੇ 1980 ਵਿਚ 121 ਸੀ। ਮੰਨ ਲਵੋ ਇਹ ਰੇਖਿਕ ਸਾਰਣੀ ਹੈ ਤਾਂ 1990 ਦਾ ਕੀਮਤ ਸੂਚਕ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਆਧਾਰ ਸਾਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਕਿਸੇ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਅਸਲ ਮੁੱਲ 10,000 ਰੁਪਏ ਹੈ ਇਸ ਵਿਚ ਘਿਸਾਵਟ ਦੀ ਸੰਯੁਕਤ ਦਰ 10 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ 6561 ਰੁਪਏ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ?
4. ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਆਬਾਦੀ 1982 ਵਿਚ 8000 ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਿਚ ਵਾਧਾ 5 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਪ੍ਰਤੀ ਸਾਲ ਨਾਲ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ ਤਾਂ 1985 ਵਿਚ ਇਸ ਸ਼ਹਿਰ ਦੀ ਕੀ ਆਬਾਦੀ ਹੋ

VII. **ਪੜ੍ਹਨ ਯੋਗ ਪੁਸਤਕਾਂ (Suggested Readings)**

1. C.S. Aggarwal and R.C. Joshi : Mathematics for Students of Economics
2. G.C. Sharma and Madhu Jain : Quantitative Techniques for Management
3. O.P. Bhardwaj and J.R. Sabharwal : Mathematics for students of Economics
4. Balwant Kander : Mathematics for Business and Economics with Application Vol. I.

List of Questions

Short Questions

1. When is matrix addition defined?
2. Define the terms (i) Scalar Matrix (ii) Lower triangular matrix
3. State the difference between matrix and determinant.
4. Define the following concepts (i) Inverse of a matrix (ii) Non-Singular matrix.
5. Give an example of 3 simultaneous equations in 3 unknown variables.
6. Find the 20th term of the series 6, 8, 10, 12 ----
7. Define G.P. Series.
8. State the nth term of G.P.
9. Find the 50th term in the series 4, 8, 16, -----
10. Which term of the series 2, 5, 8, ---- is 62?

Long Questions :

1. Find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ satisfies the equation A^2-3A+2I=0 and hence find A^{-1}

3. Find the rank of the following matrices

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Solve by matrix inverse the following system of equations
$2x_1 + 3x_2 + x_3=0$
$4x_1 + 8x_2 - 6x_3=2$
$6x_1 + x_2 - x_3=0$
Verify the result through Cramer's rule.

5. Find the sum of all integers between 1 and 500 which are neither divisible by 2 or by 3.